Trabajos Fin de Grado, curso académico 2025-26

Propuesta del profesor Matteo Bonforte

Áreas genéricas en las que dirigir trabajos: Análisis Matemático, Ecuaciones Diferenciales, Matemática Applicada.

Tema 1.- La ecuación del calor clásica y/o fraccionaria. (Genérico)

(Trabajo válido para varios estudiantes)

Resumen: Estudiaremos las propiedades básicas de los flujos del calor clásicos y/o fraccionarios (o no-locales). Los problemas se plantean en diferentes contextos Euclídeos y Riemannianos. Cuando la difusión se rige por un operador no-local, la influencia de las iteraciones de larga distancia causa nuevos fenómenos interesantes. Estos modelos son fundamentales tanto para sus consecuencias teóricas como practicas: numerosas aplicaciones, conexiones con otras áreas de las matemáticas, como análisis, geometría y procesos estocásticos (Brownianos, y de Levy o de salto).
Se pueden estudiar varias temáticas:
▷ Los problemas se pueden plantear en todo el espacio o en dominios acotados con varias condiciones de borde (Dirichlet, Neumann, etc.) y también en variedades Riemannianas
▷ Diferentes conceptos de soluciones (débiles, clásicas, etc.). Existencia y unicidad de soluciones y de trazas iniciales (teoría de Widder).
▷ Efectos regularizantes y conexiones con desigualdades funcionales (Sobolev, Gagliardo-Nirenberg, Nash, etc.)
▷ Estimaciones de regularidad
▷ Comportamiento asintótico: básico y óptimo. Métodos de entropia. Conexiones con Ecuaciones de Fokker-Planck y Ornstein-Uhlenbeck, teoría espectral, y teoremas del límite central en probabilidad, y con desigualdades funcionales.
▷ Laplacianos Fraccionarios en dominios con condiciones de Dirichlet: diferentes definiciones del operador y estudio de la ecuación del calor asociada.

Requisitos: Se recomienda, aunque no es imprescindible, haber cursado EDOs y EDPs (cuantos más mejor). También es conveniente haber cursado Teoría de la Medida e Integración, Variable Real, Análisis Funcional, Modelización.

Bibliografía:

- Brezis, Haim. Analyse fonctionnelle. Theorie et applications. Collection Mathematiques Appliquees pour la Matrise. Masson, Paris, (1983).
- M. Bonforte, Y. Sire, J. L. Vazquez, Optimal Existence and Uniqueness Theory for the Fractional Heat Equation. Nonlin. Anal. 153, (2017)
- E. B. Davies. Heat kernels and spectral theory, Cambridge Tracts in Mathematics, 92. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. x+197 pp.
- L. C. Evans. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, AMS.
- Más referencias: contactar con el profesor.

Comentarios: Las temáticas son amplias, se aceptan uno o más estudiantes en este tema, contactar con el profesor para más detalles o para tratar otros temas afines

---

Tema 2.- Ecuaciones de difusión no lineales y Flujos Gradiente. Métodos de Entropia y Desigualdades Funcionales (Generico)

(Trabajo válido para varios estudiantes)

Resumen: Se estudiaran las propiedades básicas para ecuaciones de difusión no-lineales de tipo medios porosos o p-Laplaciano: existencia, unicidad, estimaciones a priori, regularidad, comportamiento asintótico (para tiempos grandes) donde se utilizarán métodos de entropía. Estos modelos tienen una gran importancia teórica pero también en sus aplicaciones, y se podrán explorar ambas direcciones. Los métodos de entropía permiten encontrar relaciones sorprendentes con las desigualdades funcionales de tipo Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (GNS), Hardy-Poincaré (HP), etc. Se pueden considerar también sus variantes no-locales, cuando la difusión se rige por un operador fraccionario (derivadas fraccionarias) hasta considerar operadores de orden cero. Temas más geométricos: difusiones nolineales en variedades Riemannianas y los flujos nolineales geométricos (flujos de Yamabe, de curvatura media, de Variación Total).

Se pueden estudiar varias temáticas:
▷ Los problemas se pueden plantear en todo el espacio o en dominios acotados con condiciones al borde (Dirichlet, Neumann, etc.)
▷ Diferentes conceptos de soluciones (débiles, clásicas), su existencia y unicidad y sus trazas iniciales.
▷ Efectos regularizantes, estimaciones de regularidad y sus conexiones con desigualdades funcionales (GNS, también con pesos)
▷ Comportamiento asintótico: básico y óptimo. Conexiones con teoría espectral y desigualdades funcionales (GNS, HP, también con pesos)

Requisitos: Se recomienda, aunque no es imprescindible, haber cursado EDOs y EDPs (cuantos más mejor). También es conveniente haber cursado Teoría de la Medida e Integración, Variable Real, Análisis Funcional, Modelización.

Bibliografía:

- J. L. Vazquez. "The porous medium equation. Mathematical theory". Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.
- Brezis, Haim. Analyse fonctionnelle. Thorie et applications. Collection Mathematiques Appliquees pour la Matrise. Masson, Paris, (1983).
- L. C. Evans. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, AMS.
- Más referencias: contactar con el profesor.

Comentarios: Las temáticas son amplias, se aceptan uno o más estudiantes en este tema, contactar con el profesor para más detalles o para tratar otros temas afines.

Tema 3.- Calculo de Variaciones: métodos directos e indirectos. (Generico)

(Trabajo válido para varios estudiantes)

Resumen: Se abordará uno (o más) entre los temas clásicos o más recientes del cálculo de variaciones: por ejemplo el problema isoperimétrico, de superficies mínimas, de potenciales de doble pozo (Allen-Cahn), problemas de mecánica clásica (por ejemplo mecánica celeste o mecánica Lagrangiana/Hamiltoniana), el problema de obstáculo, el problema de Laplace (Laplaciano o p-Laplaciano), problema geométricos: geodésicas, mapas conformes, curvatura media, etc.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a estos problemas resultan ser ordinarias EDOs o en derivadas parciales EDPs, dependiendo del problema considerado. El método directo consiste en encontrar extremales (puntos críticos del funcional) de dichas ecuaciones usando métodos de análisis funcional. Los métodos indirectos consisten en resolver dichas ecuaciones por otros métodos más clásicos (cuando se puede).

Un tema muy interesante es el problema de la regularidad de los minimos de los funcionales (XIX problema de Hilbert) y la solución de ello dada por De Giorgi-Nash-Moser. Este tema está relacionado con las EDPs elípticas lineales y no-lineales: se puede estudiar con métodos de cálculo de variaciones la existencia, unicidad, y las estimaciones de regularidad.

Requisitos: Se recomienda, aunque no es imprescindible, haber cursado Modelización, EDOs y EDPs (cuantos más mejor). También es conveniente haber cursado Teoría de la Medida e Integración, Variable Real, Análisis Funcional.

Bibliografía:

- B. Dacorogna, Introduction to the calculus of variations, Imperial College Press(2004)
- M. Kot, A first course in the calculus of variations
- Gelfand, Fomin, Calculus of Variations-Dover Publications (2000)
- M. Giaquinta, S. Hildebrandt - Calculus of variations I (2006, Springer)
- E. Giusti, Direct methods in the calculus of variations, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ , 2003.
- Mas referencias: contactar con el profesor.

Comentarios: Las temáticas son amplias; se aceptan uno o más estudiantes en este tema, contactar con el profesor para más detalles o para tratar otros temas afines.

Tema 4.- Flujos Gradiente, EDPs de evolución y aplicaciones a las redes neuronales y al Machine Learning (Generico)

(Trabajo válido para varios estudiantes)

Resumen: Las redes neuronales y procesos de Machine Learning (ML) se basan en un descenso de gradiente (GF, flujo gradiente) estocástico, discreto, que busca minimizar un funcional de coste, en la mayoría de los casos no-convexo. Esta es la dificultad mayor, dado que la teoría establecida de flujos gradientes se basa en la convexidad del funcional de coste. Unos resultados recientes (2020) nos dicen que se pueden interpretar los procesos de ML como una discretización de un proceso continuo que a su vez tiene asociada una ecuación de Fokker-Planck (FP, con carácter degenerado y potencial no convexo), una ecuación de difusión y de transporte: las dos características compiten o crean sinergias, pintando un panorama tan rico cuanto complejo. El estudio de dichas ecuaciones está todavía en desarrollo: es muy difícil prever su comportamiento a tiempos largos (esto nos diría lo que va a aprender la red y la tasa de aprendizaje). Se propone estudiar unos casos modelo (simplificados) para entender las técnicas básicas de GF en espacios de Hilbert (teoria que permite atacar muchos otros problemas). Las propiedades de las soluciones de la ecuación de FP permiten obtener información valiosa sobre los flujos gradiente estocásticos. A su vez, esto permite entender los problemas y las dificultades que se encuentran en los procesos de inteligencia artificial (sus limitaciones y sus alcances, su manera de operar y apredner), cada vez más complejos, que han aparecido en nuestra vida cotidiana.

Requisitos: Se recomienda, aunque no es imprescindible, haber cursado EDOs y EDPs (cuantos más mejor). También es conveniente haber cursado Teoría de la Medida e Integración, Variable Real, Análisis Funcional, Modelización.

Bibliografía:

- D. Barbieri, M. Bonforte, P. Ibarrondo. Is Stochastic Gradient Descent Effective? A PDE Perspective on Machine Learning processes. https://arxiv.org/abs/2501.08425
- Mas referencias: contactar con el profesor.

Comentarios: Las temáticas son amplias, se aceptan uno o más estudiantes en este tema, contactar con el profesor para más detalles o para tratar otros temas afines.
