Trabajos Fin de Grado, curso académico 2025-26

Propuesta de la profesora María Ángeles Zurro Moro

Área en la que dirigir trabajos genéricos: Álgebra.

Tema 1.- Álgebra Computacional y Aplicaciones

(Trabajo válido para varios estudiantes)

Resumen: Se estudiará la resolución efectiva de sistemas finitos de ecuaciones polinómicas con coeficientes en un cuerpo. El objetivo esencial del trabajo será estudiar el algoritmo de Buchberger de construcción de bases de Gröbner y sus mejoras. Desde un punto de vista computacional se usará el Sagemath (antes SAGE) para implementar los algoritmos resultantes de este trabajo. Las aplicaciones de estos temas a problemas actuales se adaptarán a los intereses del/ de la alumno/a.

Bibliografía:

- Cox, David A. and Little, John and O'Shea, Donal. Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Springer-Verlag, UTM, 2007.
- Cox, D. A., Little, J., O'Shea, D. . Using Algebraic Geometry. Springer-Verlag, GTM 185, 2005.
- Möller, H.M., Buchberger, B. . The construction of multivariate polynomials with preassigned zeros. Lecture Notes in Comp. Sci..

Tema 2.- Álgebra Diferencial y Aplicaciones

(Trabajo válido para varios estudiantes)

Resumen: Joseph Ritt desarrolló el álgebra diferencial porque consideraba insatisfactorios los intentos de reducir sistemas de ecuaciones diferenciales a diversas formas canónicas. Sin embargo, el éxito de los métodos de eliminación algebraica y la teoría de variedades algebraicas motivó a Ritt a considerar un enfoque similar para las ecuaciones diferenciales. Sus esfuerzos dieron lugar a un artículo inicial titulado Variedades de Funciones Definidas por Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas y a dos libros, Ecuaciones Diferenciales Desde el Punto de Vista Algebraico y Álgebra Diferencial. Ellis Kolchin, alumno de Ritt, impulsó este campo y publicó Álgebra Diferencial y Grupos Algebraicos.

Un polinomio diferencial sobre un cuerpo diferencial K es una formalización del concepto de ecuación diferencial, de modo que las funciones conocidas que aparecen en la ecuación pertenecen a K, y las indeterminadas son símbolos (funciones diferenciablemente trascendentes) para las funciones desconocidas soluciones de la ecuación diferencial. La construcción del anillo de polinomios diferenciales es un primer objetivo del trabajo.

Se proponen dos líneas de aplicaciones. Una hacia la integración simbólica de funciones de una variable. Otra hacia la factorización de operadores diferenciales. Ambas necesitan una base de Teoría de Galois diferencial que el alumno aprenderá tutorizado para estudiar los problemas relativos a la aplicación elegida.

Requisitos: Tener conocimientos de Teoría de Galois de ecuaciones algebraicas.

Bibliografía:

- Bronstein, M. (2005). Symbolic integration I: transcendental functions (Vol. 1). Springer Science and Business Media.
- Carra-Ferro, G., Gerdt, V. P. (2003). Improved Kolchin–Ritt algorithm. Programming and Computer Software, 29, 83-87.
- Crespo, T., Hajto, Z. (2011). Algebraic groups and Differential Galois Theory (Vol. 122). American Mathematical Soc.
- Kolchin, E. R. (1973). Differential algebra and algebraic groups (Vol. 54). Academic press.
- Ritt, J. F. (1950). Differential algebra (Vol. 33). American Mathematical Soc..

Tema 3.- Algoritmos de cálculo de bases de Gröbner

Propuesta en común con el profesor Daniel Ortega Rodrigo.

Resumen: En matemáticas, y más específicamente en el ámbito del álgebra computacional, la geometría algebraica computacional y el álgebra conmutativa computacional, una base de Gröbner es un conjunto generador particular de un ideal en un anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo. Este tipo de base permite deducir de manera eficiente muchas propiedades relevantes del ideal y de la variedad algebraica asociada, tales como su dimensión o el número de soluciones (ceros), cuando este es finito. El cálculo de una base de Gröbner constituye una herramienta fundamental para la resolución práctica de sistemas de ecuaciones polinómicas, así como para el estudio de imágenes de variedades algebraicas bajo proyecciones o aplicaciones racionales. Puede considerarse, en cierto sentido, como una generalización multivariable y no lineal del algoritmo de Euclides (para el máximo común divisor de polinomios) y de la eliminación gaussiana (para sistemas lineales). Las bases de Gröbner fueron introducidas por Bruno Buchberger en su tesis, en la cual también presentó un algoritmo para su cálculo, conocido como el algoritmo de Buchberger. El nombre fue elegido en honor a su director de tesis, W. Gröbner. El algoritmo F4, desarrollado por Faugére, optimiza el cálculo de bases de Gröbner mediante técnicas de álgebra lineal. Este trabajo tiene como objetivo estudiar tanto el algoritmo F4 como su predecesor, e ilustrarlos usando SageMath.

Bibliografía:

- Cox, D. A., and Little, J., O'Shea, D. (2007). Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Springer-Verlag, UTM.
- Cox, D. A., Little, J., O'shea, D. (2005). Using algebraic geometry (Vol. 185). Springer Science and Business Media.
- Faugére, J. C. (1999). A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F4). Journal of Pure and Applied Algebra, 139(1-3), 61-88.
