

## Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2023-24

**PROFESOR:** Fernando Quirós Gracián

**Número máximo de TFG que solicita dirigir:** 2

1.- **TEMA:** El 19º problema de Hilbert

**Válido para:** 1 alumno.

**Resumen/contenido:** El 19º problema de Hilbert, proveniente del Cálculo de Variaciones, consiste en demostrar que los minimizantes locales del funcional de energía  $E(w) = \int_{\Omega} F(Dw)$  son regulares si  $F$  es regular. Uno de los pasos para resolverlo es demostrar la regularidad Hölder de las soluciones de ecuaciones lineales elípticas en forma de divergencia con coeficientes medibles y acotados (posiblemente discontinuos). En este trabajo se estudiará la solución dada por E. de Giorgi en 1957 a este paso. De acuerdo con los intereses del alumno, se podrían estudiar también las demostraciones alternativas de Nash (1958) o Moser (1960). También se podría analizar algún otro de los pasos de la solución del problema original propuesto por Hilbert.

**Requisitos:** Se trata de un trabajo exigente, que requiere un buen conocimiento de Teoría de la Medida, y gusto por el Análisis Matemático y las EDP. Convendría que quien lo vaya a realizar curse las asignaturas “Variable Real” y “Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones” y, a ser posible, también “Análisis Funcional”.

**Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles:** “Variable Real”, “Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones” y “Análisis Funcional”.

### **Bibliografía/referencias:**

- De Giorgi, E. *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*. (Italian) Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 (1957) 25–43.
- DiBenedetto, E. “Partial differential equations.” Second edition. Cornerstones. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010. ISBN: 978-0-8176-4551-9.
- Moser, J. *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*. Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 457–468.
- Nash, J. *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*. Amer. J. Math. 80 (1958) 931–954.
- Vasseur, A. F. *The De Giorgi method for elliptic and parabolic equations and some applications*. Lectures on the analysis of nonlinear partial differential equations. Part 4, 195–222, Morningside Lect. Math., 4, Int. Press, Somerville, MA, 2016.

2.- **TEMA:** Trabajo genérico en EDP / Teoría de la Medida (orientada a EDP).

**Válido para:** 2 alumnos

**Resumen/contenido:** El trabajo versará sobre un tema de ecuaciones en derivadas parciales (EDP), preferentemente elípticas o parabólicas, o bien sobre algún tema de Teoría de la Medida útil para el estudio de EDP. El contenido preciso se fijará después de las primeras reuniones con el alumno, adaptándolo a su formación previa e intereses. Algunas posibilidades son:

- Problemas de difusión no lineal (ecuación del medio poroso, ecuación de evolución p-laplaciana).
- El problema de Stefan (evolución de una mezcla de agua y hielo).
- Operadores no locales (Laplaciano fraccionario, operadores de convolución).
- Introducción al Cálculo de Variaciones.
- Teoría de Semigrupos.
- Convergencias débiles.
- Funciones de variación acotada y conjuntos de perímetro finito.
- Otros que puedan interesar al alumno y que el profesor considere adecuados.

**Requisitos:** El alumno debe haber cursado la asignatura “Teoría Integral y de la Medida” y también “Ecuaciones en Derivadas Parciales” si va a elegir un tema de EDP.

**Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles:** “Variable Real”, “Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones” y “Análisis Funcional”.

**Bibliografía/referencias:**

- Andreu-Vaillo, F.; Mazón, J. M.; Rossi, J. D.; Toledo-Melero, J. J. “Nonlocal diffusion problems.” *Mathematical Surveys and Monographs*, 165. American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2010.
- Brezis, H. “Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.” *Universitext*. Springer. New York, 2011.
- Cazenave, T.; Haraux, A. “An introduction to semilinear evolution equations.” *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*, 13. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- Di Nezza, E.; Palatucci, G.; Valdinoci, E. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*. *Bull. Sci. Math.* 136 (2012), no. 5, 521–573.
- Evans, L. C. “Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations.” *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 74. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- Evans, L. C. “Partial Differential Equations.” *Graduate Studies in Mathematics*, Vol. 19. AMS, 1998.
- Evans, L. C.; Gariepy, R. F. “Measure theory and fine properties of functions. Revised edition.” *Textbooks in Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.
- Friedman, A. “Variational principles and free-boundary problems.” Second edition. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Malabar, FL, 1988.

- Kinderlehrer, D.; Stampacchia, G. “An introduction to variational inequalities and their applications.” Reprint of the 1980 original. Classics in Applied Mathematics, 31. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.
- Vázquez, J. L. “The porous medium equation. Mathematical theory.” Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.