

Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2022-23

PROFESOR: TOMÁS SANZ PERELA

Número máximo de TFG que solicita dirigir: 1 (si es muy necesario 2)

1.- TEMA: ¿Se puede oír la forma de un tambor? (Específico)

Válido para 1 estudiante.

Resumen/contenido:

La vibración de una membrana se puede modelizar usando la ecuación de ondas, y mediante el método de separación de variables se observa que las frecuencias del sonido que emite la membrana están directamente relacionadas con los autovalores del operador laplaciano en el dominio del plano que modeliza la membrana. Así, según la forma del dominio, se obtienen distintos autovalores y, por lo tanto, distintas frecuencias. Es decir, la forma de la membrana determina las frecuencias que un tambor puede emitir.

En el famoso artículo "Can one hear the shape of a drum?", M. Kac se hacía la pregunta contraria: dado un conjunto de frecuencias, ¿podemos determinar la forma del tambor? Esta pregunta se puede reformular de manera más matemática como "¿dados dos dominios del plano distintos, pueden estos dar lugar a los mismos autovalores para el laplaciano?".

El objetivo de este trabajo consiste en entender bien estas cuestiones y estudiar la construcción de dominios isoespectrales, que dan una respuesta negativa a la pregunta de Kac.

Requisitos: Haber cursado la asignatura Ecuaciones en derivadas parciales

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: EDP

Bibliografía/referencias:

- Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum?. The american mathematical monthly, 73(4P2), 1-23.

2.- TEMA: Existencia, simetría y rigidez de soluciones mediante el principio del máximo (Específico)

Válido para 1 estudiante.

Resumen/contenido:

El objetivo del trabajo es entender bien tres técnicas ampliamente usadas en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales:

1. Iteración monótona: para construir soluciones a problemas no lineales
2. Planos móviles: para demostrar simetría y monotonía
3. Deslizamiento: para demostrar unidimensionalidad y monotonía

Los tres métodos tienen una interpretación geométrica muy visual y su ingrediente principal es el principio del máximo, que se estudiará en distintas formas.

A partir de aquí, en función de los intereses que el/la estudiante tenga, se podrán estudiar distintas extensiones de estos métodos para operadores no-locales u otras aplicaciones.

Requisitos: Variable real, Ecuaciones en derivadas parciales

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: EDP

Bibliografía/referencias:

- Evans, L. C. (1998). Partial differential equations. *Graduate studies in mathematics*, 19(4), 7.
- Cabré, X. (2002). Topics in regularity and qualitative properties of solutions of nonlinear elliptic equations. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 8(2), 331.
- Berestycki, H., Hamel, F., & Monneau, R. (2000). One-dimensional symmetry of bounded entire solutions of some elliptic equations. *Duke Mathematical Journal*, 103(3), 375-396.

3.- TEMA: **La regularidad de las superficies mínimas** (Específico)

Válido para 1 estudiante

Resumen/contenido:

Uno de los resultados más importantes en la teoría de superficies mínimas es que, en dimensiones bajas (menores que 8) las superficies que minimizan el área son regulares, mientras que en dimensiones 8 y superiores existen ejemplos de minimizantes que tienen singularidades.

El objetivo de este trabajo es comprender estos resultados y las técnicas que se usan para demostrarlos, tomando como referencia los dos artículos referenciados más abajo. Los contenidos son de un nivel más avanzado a los del grado, se recomienda contactar antes con el profesor.

Requisitos: Variable real, Teoría de la integral y la medida

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: EDP, Análisis Funcional.

Bibliografía/referencias:

- Cozzi, M., & Figalli, A. (2017). Regularity theory for local and nonlocal minimal surfaces: an overview. *Nonlocal and nonlinear diffusions and interactions: new methods and directions*, 117-158.
- Cabré, X., & Poggesi, G. (2018). Stable solutions to some elliptic problems: minimal cones, the Allen-Cahn equation, and blow-up solutions. In *Geometry of PDEs and related problems* (pp. 1-45). Springer, Cham.

4.- TEMA: **Elementos matemáticos del tratamiento de la música digital** (Específico)

Válido para 1 estudiante.

Resumen/contenido:

El objetivo de este trabajo es entender las herramientas básicas que se utilizan en el tratamiento de la música digital. En particular, se estudiará la transformada de Fourier, la transformada z y el teorema de Nyquist, que asegura que bajo ciertas condiciones se puede recuperar completamente una señal continua a partir de un número finito de muestras. También se estudiarán algunos filtros digitales y la transformada de Fourier discreta.

Requisitos: Es recomendable haber cursado la asignatura Ecuaciones en derivadas parciales o tener conocimientos básicos sobre series de Fourier.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: EDP

Bibliografía/referencias:

- Benson, D. (2006). *Music: A mathematical offering*. Cambridge University Press.