



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
Código: 32931
Centro: Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
Nivel: Máster M2
Tipo: Optativa
Nº de créditos: 6

ASIGNATURA / **COURSE TITLE**

Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales / [Advanced Course in Partial Differential Equations](#)

1.1. Código / **Course number**

32931

1.2. Materia / **Content área**

Partial Differential Equations, theory and applications

1.3. Tipo / **Course type:**

Formación optativa / [Optional topic](#)

1.4. Nivel / **Course level:**

Máster M2 / [Master M2](#)

1.5. Curso / **Year:**

2016/2017

1.6. Semestre / **Semester**

Segundo / [Second \(Spring semester\)](#)

1.7. Idioma / **Language**

Español e inglés. (El curso se podrá impartir en inglés siempre y cuando, al menos, un alumno internacional matriculado en la asignatura lo solicite). / [Spanish and English. \(The course can be taught in English if at least one officially registered international student requests so\).](#)

1.8. Requisitos previos / **Prerequisites**

Es importante que el alumno posea los conocimientos básicos de introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. En ese sentido, se recomienda encarecidamente haber cursado la asignatura de EDP del Primer Cuatrimestre del Máster.



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
Código: 32931
Centro: Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
Nivel: Máster M2
Tipo: Optativa
Nº de créditos: 6

Asimismo, resultará de gran utilidad poseer conocimientos previos de Variable Real y de Análisis Funcional.

It is important that the student to have the basic knowledge of introduction to the Partial Differential Equations. In that sense, it is strongly recommended having followed the EDP's course of the first semester of the Master program. Likewise, it will be of great usefulness to possess previous knowledge of Real Variable and Functional Analysis.

1.9. Requisitos mínimos de asistencia a las sesiones presenciales / **Minimum attendance requirement**

La asistencia es muy recomendada, las ausencias han de ser justificadas.

Attendance is highly recommended, occasional absence must be justified.

1.10. Datos del equipo docente / **Faculty data**

Profesor / **Professor** Ireneo Peral Alonso
Departamento de / **Department of** Mathematics
Facultad de Ciencias / **Faculty of** Sciences
Despacho - Módulo / Office 510, módulo 17
Teléfono / **Phone:** +34 91 497 4204
Correo electrónico/**Email:** ireneo.peral@uam.es
Página web/**Website:** https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ireneo/
Horario de atención al alumnado/**Office hours:** se anunciará / to be announced.

Objetivos del curso / **Course objectives**

El objetivo principal del curso consiste en ofrecer una panorámica actual de problemas modelizados por ecuaciones elípticas y parabólicas, tanto lineales como no lineales, presentes en las líneas de investigación. Se trata fundamentalmente de poner al alumno frente a la axiomática que justifica estas ecuaciones así como las técnicas que se han venido desarrollando para resolverlas. Los modelos que se estudiarán son básicos pero los resultados que se obtienen pueden considerarse como prototipos de comportamientos en situaciones más complicadas y generales. Dentro de esta generalidad se analizarán las similitudes y diferencias entre modelos locales y no locales para ofrecer al alumno una información cercana a diversas líneas de investigación que se han abierto recientemente.

The main goal of this course is to present an actual landscape of problems modeled by Linear and Nonlinear Elliptic and Parabolic equations that appear in the current

lines of research. The course in a fundamental way, treat to place the student in front of the axiomatic that justify these equations as well as the techniques developed to solve them. The models to be studied are the basic ones but the results that are obtained can be considered as prototypes of behaviors in more complicated and general situations. In this general framework, there will be analyzed the similarities and differences between local and not local models, to offer to the student an information close to diverse lines of research that have been opened recently.

Contenidos del programa / Course contents

1. Un problema elíptico lineal en forma de divergencia

- Existencia de solución débil del problema, $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$.
- Sumabilidad de las soluciones en términos de la sumabilidad de f . Resultados de Stampacchia.
- El teorema de De Giorgi.

2. Problemas elípticos relacionados con el Laplaciano fraccionario.

- Existencia de soluciones débiles.
- Teoría de Calderón-Zygmund.
- Desigualdad de Harnack y regularidad Hölder de las soluciones.
- El p -Laplaciano fraccionario.

3. Problemas con formulación variacional para la ecuación de Laplace.

- Autovalores del operador de Laplace.
- Teoría de puntos críticos y aplicaciones.
- Problemas críticos: idea del método de concentración-compacidad.
- Algunos problemas de la Geometría.

4. Algunos problemas de crecimiento: problemas elípticos y parabólicos casi-lineales.

- **Problemas elípticos.**
- La ecuación $-\Delta u = |\nabla u|^2 + f$, modelo estacionario de Kardar-Parisi-Zhang. Ecuaciones relacionadas.
- Condiciones necesarias y suficientes para la existencia.
- Resultado de no unicidad. La ecuación de Laplace con dato medida buena. Idea de solución de entropía o solución obtenida como límite de aproximaciones.
- Un modelo KPZ con difusión fraccionaria.
- **Problemas parabólicos.**
- Problemas semilineales para el problema de Cauchy de la ecuación del calor. Principios de comparación. Existencia local en el tiempo.

El fenómeno de Fujita: el concepto de explosión en tiempo finito.
Existencia global para datos pequeños y conveniente regularidad.

- El modelo de Kardar-Parisi-Zhang: cambio de Hofp-Cole y modelo de crecimiento de tumores cerebrales.

5. Ecuación del calor con difusión fraccionaria.

- Existencia de soluciones de energía finita.
- Existencia y sumabilidad de soluciones débiles.
- El resultado de Widder para la ecuación del calor con difusión fraccionaria.

6. Un modelo de crecimiento epitaxial.

- Modelización.
- La ecuación $u_t + \Delta^2 u = \det D^2(u) + f$ en dos dimensiones espaciales.
- Sobre la regularidad del hessiano de una función del espacio $W^{2,2}(\mathbb{R}^2)$.
- Formulación variacional del problema estacionario con condiciones Dirichlet.
- Problema estacionario con condiciones Navier.
- El problema de evolución: Existencia, unicidad, comportamiento asintótico, etc.

7. Extensiones y problemas abiertos.

1. An elliptic problem in divergence form

- Existence of weak solution to problem, $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$.
- Summability of the solutions in terms of the integrability of f . Stampacchia's results.
- The De Giorgi' Theorem.

2. Elliptic problems related to the fractional laplacian.

- Existence of weak solutions.
- The Calderón-Zygmund theory.
- The Harnack inequality and Hölder regularity of the solutions.
- The fractional p-Laplacian.

3. Variational problems for the Laplace equation.

- Eigenvalues for the Dirichlet problem.
- Critical Points Theory and applications.
- Critical problems: some ideas about the concentration-compactness method.
- Some problems in Geometry.

4. Some growth problems: quasi-linear elliptic and parabolic problems.

- Elliptic problems.
- The equation $-\Delta u = |\nabla u|^2 + f$, Kardar-Parisi-Zhang stationary model. Related equations.



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
Código: 32931
Centro: Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
Nivel: Máster M2
Tipo: Optativa
Nº de créditos: 6

- Necessary and sufficient conditions for existence.
- Nonuniqueness results. The Laplace equation with a good measure data. Idea of entropy solution and solution as limit of approximations.
- A KPZ model with fractional diffusion.
- **Parabolic Problems.**
- Semilinear problems for the Cauchy problem for the heat equation. Comparison principles. Existence of solution for small times. The Fujita phenomenon: finite time blow-up and global solutions for small data
- 5. **Heat equation with fractional.**
 - Existence of solutions of finite energy.
 - Existence and summability of weak solutions.
 - The Widder type result for the fractional heat equations.
- 6. **A model on epitaxial growth.**
 - Modelization.
 - The equation $u_t + \Delta^2 u = \det D^2(u) + f$ in a bidimensional domain.
 - On the Hessian regularity for the functions in the space $W^{2,2}(\mathbb{R}^2)$.
 - Variational formulation for the stationary Dirichlet problem.
 - Stationary problem with Navier boundary conditions.
 - The evolution problem: Existence, uniqueness, asymptotic behavior, etc.
- 7. **Further results and open problems.**

1.11. Referencias de consulta / Course bibliography

Libros/**Books**

Ambrosetti, A.; Malchiodi, A.: *Nonlinear analysis and semilinear elliptic Problems*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 104. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

Brezis, H.: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

Dacorogna, B.: *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, 1989.

Evans, L. C.: *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
Código: 32931
Centro: Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
Nivel: Máster M2
Tipo: Optativa
Nº de créditos: 6

Evans, L. C., Gariepy, R. F.: *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

Evans, L. C.: *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 74. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

Gazzola, F., Grunau, H. and Sweers, G.: *Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains*. Lecture Notes in Mathematics, 1991. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
Giusti, E. ; *Metodi Diretti nel Calcolo delle Variazioni*, U.M.I. 1994.

Quittner, P., Souplet, P.: *Superlinear parabolic problems. Blow-up, global existence and steady states*. Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

Artículos/ [Articles](#).

Se complementaran las referencias con una lista de artículos.
[The references will be complemented by a list of papers.](#)

2. Métodos docentes / [Teaching methodology](#)

El material básico se cubrirá en clases convencionales. Parte de los temas avanzados serán asignados a los estudiantes para estudio individual. Se espera que los estudiantes presenten estos temas en el aula. Se propondrán ejercicios.

[The basic material will be covered in standard lectures. Part of the more advanced topics will be assigned to the students for individual study. The students are expected to present these topics in the classroom. Exercises will be proposed.](#)

3. Tiempo de trabajo del estudiante / [Student workload](#)

		Nº de horas	
Presencial	Clases teóricas	42 h (28%)	54 h (36%)
	Tutorías programadas a lo largo del semestre	4 h (2,7%)	
	Seminarios y trabajos	6 h (4%)	



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
Código: 32931
Centro: Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
Nivel: Máster M2
Tipo: Optativa
Nº de créditos: 6

		Nº de horas	
	Examen final	2 h (1,3%)	
No presencial	Elaboración de problemas	39 h (26%)	96h (64%)
	Estudio semanal	51 h (34%)	
	Preparación del examen (presentación)	6 h (4%)	
Carga total de horas de trabajo: 25 horas x 6 ECTS		150 h	

4. Métodos de evaluación y porcentaje en la calificación final / Evaluation procedures and weight of components in the final grade

EVALUACIÓN ORDINARIA

La nota final será la media ponderada entre la evaluación continua (problemas y exposiciones; peso 30%) y el examen oral final (peso 70%) que versará sobre un tema previamente asignado. Más detalles serán dados al comienzo del curso.

EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA

Examen final 100%

ORDINARY EVALUATION

The final grade will be obtained as the average of the continuous assessment (problems and expositions; weight 30%) and the final oral exam (70%) about a subject previously assigned. More details will be given at the beginning of the course.

EXTRAORDINARY EVALUATION

Final exam 100%

5. Cronograma* / Course calendar

6.

Semana Week	Contenido Contents	Horas presenciales Contact hours	Horas no presenciales Independent study time
1-2	Capítulo 1	6	14
3-4	Capítulo 2	6	12



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
Código: 32931
Centro: Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
Nivel: Máster M2
Tipo: Optativa
Nº de créditos: 6

5-7	Capitulo 3	9	20
8-10	Capitulo 4	9	20
11	Capitulo 5	3	8
12-14	Capitulo 6	9	18
	Capitulo 7	3	3
14-16	evaluaciones	14	16

*Este cronograma tiene carácter orientativo / [Tentative](#)