Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Tercera Edición, 2008/2009

TRABAJO: La pirámide de Tartaglia

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

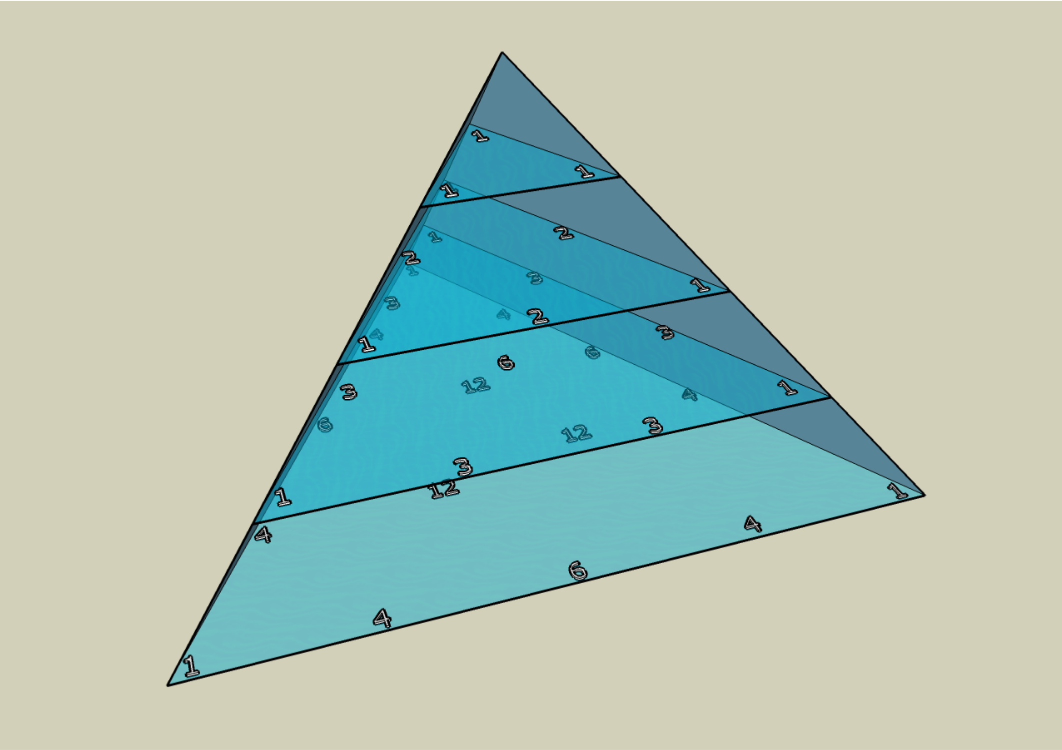
- Manuel Bustillo Alonso
- Jorge Dor's Rabasa
- Luís García Fresno
- Jorge Hernández Sanz
- Miguel Mellado Guerra

TUTORES:

- Luís Sanz Goizueta

CENTRO: Colegio Fray Luis de León (Madrid)

LA PIRÁMIDE DE TARTAGLIA



"LOS TARTAGLIANOS"

MADRID 24 DE ABRIL DE 2009

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

El Triángulo de Tartaglia, también denominado de Pascal, es una colección de números infinitos dispuestos en forma triangular que se obtienen de una manera muy sencilla. En la parte superior del triángulo hay un número 1, en la segunda fila hay dos 1, y las demás filas empiezan y terminan siempre con 1. Además, cada número intermedio se obtiene sumando los dos que se encuentran justo encima.

Su interés radica en su aplicación en álgebra y se relaciona con el desarrollo de las potencias de un binomio y con los números combinatorios. Se denomina binomio de Newton a la expresión que relaciona las potencias de una suma $(a + b)^n$. Sin embargo la resolución de operaciones más complicadas del tipo $(a + b + c)^n$, requieren intuitivamente de representaciones tridimensionales del triángulo de Tartaglia.

Nuestro proyecto surgió cuando en un ejercicio de clase se nos planteó un trinomio al cuadrado y viendo que el desarrollo era complicado, nos propusimos encontrar un método más sencillo para su resolución.

2. OBJETIVOS

Aunque existen algunos métodos de resolver los trinomios $(a+b+c)^n$, son en general bastante complicados. Por esa razón, en el presente proyecto nos proponemos encontrar un nuevo método que facilite su resolución.

De ese modo los objetivos principales que nos proponemos son:

1. **Extender las aplicaciones del triángulo de Tartaglia a la resolución de trinomios.**

2. **Demostrar la universalidad del nuevo método para resolver la operación cualquiera que sea el valor de n.**

3. **Desarrollar un programa informático que permita la resolución directa de los trinomios $(a + b + c)^n$.**

3. RESULTADOS

El triángulo de Tartaglia permite la resolución de cualquier binomio de la forma $(a+b)^n$. El método tiene un carácter universal, ya que su aplicación es válida para cualquier grado "n" natural que presente la operación. Sin embargo aunque éste sea el origen del presente proyecto, nuestra aportación incluye un paso más de complejidad. La pregunta que pretendemos contestar es si basados en los conceptos del triángulo de tartaglia podremos resolver trinomios $(a+b+c)^n$ y si esa resolución puede responder a una fórmula general y universal.

El método que utilizamos inicialmente fue absolutamente empírico, empezamos por resolver, utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación, todos los trinomios hasta el grado n= 9, es decir $(a+b+c)^9$. Este sistema, aunque muy efectivo en los grados bajos, era muy lento, y se mostraba laborioso e ineficaz para grados elevados.

Para facilitar la manipulación de los datos, ideamos una manera de representar los gráficamente. Dicha representación utiliza para cada grado del trinomio, un triángulo equilátero (Figura 1).

				A				
				1				
			3		3			
		3		6		3		
	1		3		3		1	
B								C

Figura 1. Representación gráfica del trinomio $(a+b+c)^3$

Como orientación inicial, podemos decir que la proximidad del número a la letra define el exponente de ésta. Por ejemplo, el 6 que ocupa la posición central del triángulo es equidistante a todas las letras y por ello el exponente de todas cuando multiplique por ese factor será 1. Así ese término corresponderá a 6abc. Sin embargo el numero 3 coloreado en rojo (figura 1), está en la línea AC, por lo que no multiplica por B y más cerca de la A que de la C por lo que asigna a la A un coeficiente mayor que 1 pero a la vez menor que 3, grado máximo del trinomio. Es decir que este término correspondería a $3a^2c$.

El triángulo obtenido presenta una analogía clara con el cuarto escalón del triángulo de Tartaglia (1-3-3-1), es decir con el correspondiente al tercer nivel. Los laterales de nuestro triángulo equilatero (**Figura 2A**) contienen los mismos coeficientes presentes en el triángulo de Tartaglia (**Figura 2B**). Una relación igual se encontró para cualquier grado de n del trinomio y su escalón correspondiente en el triángulo de Tartaglia.

A)

				A				
				1				
			3		3			
		3		6		3		
	1		3		3		1	
B								C

B)

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

Figura 2. Los laterales del triángulo obtenido para el trinomio$(a+b+c)^3$ (A) son iguales que el escalón correspondiente del triángulo de Tartaglia (B).

Otra relación existente se encuentra entre los números, que forman el lateral y los números centrales. Sobre el trinomio al cuarto grado de la figura 3 se puede observar que si restamos a uno de los dos números en rojo una unidad, y lo multiplicamos por el otro obtenemos el número señalado en verde [(4-1) x 4 = 12]. Ese mismo resultado se obtiene al sumar los dos números limítrofes en azul [6+6 =12]. Sin embargo esta relación sólo es aplicable a los coeficientes más próximos a las esquinas del triángulo.

					A					
					1					
				4		4				
			6		12		6			
		4		12		12		4		
	1		4		6		4		1	
B										C

Figura 3. Representación gráfica del trinomio *$(a+b+c)^4$*

Además, cuando se eleva un trinomio a un grado primo, (1,2,3,5,7,11,13, ...) todos los coeficientes resultantes son múltiplos de ese número tal y como ejemplifica la figura 4 que se corresponde con el trinomio de grado 5.

						A						
						1						
					5		5					
				10		20		10				
			10		30		30		10			
		5		20		30		20		5		
	1		5		10		10		5		1	
B												C

Figura 4. Representación gráfica del trinomio *$(a+b+c)^5$*

La cuarta relación existente consiste en que los triángulos correspondientes a los grados múltiplos de 3 presentan siempre un coeficiente en el centro del triángulo, que es por lo tanto equidistante a cada vértice. Ese coeficiente siempre multiplica a las letras de los vértices elevadas a un mismo exponente que se corresponderá con el grado del triángulo dividido entre 3 (figura 5). Es decir para el trinomio de grado 6 (Figura 5A), el coeficiente será 90 y los exponentes de a, b y c serán (6:3 = 2), resultando por lo tanto $90a^2\ b^2\ c^2$. Para el trinomio de grado 3 (Figura 5B), el coeficiente será 6y los exponentes de a, b y c serán (3:3 = 1), resultando por lo tanto 6abc.

A)

							A							
							1							
						6		6						
					15		30		15					
				20		60		60		20				
			15		60		90		60		15			
		6		30		60		60		30		6		
	1		6		15		20		15		6		1	
B														C

B)

				A				
				1				
			3		3			
		3		6		3		
	1		3		3		1	
B								C

Figura 5. Representación gráfica del trinomio *$(a+b+c)^6$(A) y del trinomio $(a+b+c)^3$(B).*

Igual que en el triángulo de Tartaglia cada fila suma una potencia de 2, en la “Pirámide de Tartaglia”, cada nivel suma una potencia de 3. Por ejemplo para el trinomio de grado 3, sumando todos los números obtenemos (1x3)+(6x3)+(1x6)=27, es decir 3^3, y para el trinomio de grado 4, (1x3)+(4x6)+(6x3)+(12x3)=81, es decir 3^4.

Por último, superponiendo un nivel al inmediatamente anterior, descubrimos como obtener un nivel a partir del nivel anterior (Figura 6A). Se suman los números en triángulos, por ejemplo los coeficiente en azul 4+4+12 del nivel 4 dan lugar al coeficiente 20 del nivel 5, en verde (Figura 6B).

A)

						A						
						1						
					5	1	5					
				10	4	20	4	10				
			10	6	30	12	30	6	10			
		5	4	20	12	30	12	20	4	5		
	1	1	5	4	10	6	10	4	5	1	1	
B												C

B)

						A						
						1						
					5	1	5					
				10	4	20	4	10				
			10	6	30	12	30	6	10			
		5	4	20	12	30	12	20	4	5		
	1	1	5	4	10	6	10	4	5	1	1	
B												C

Figura 6. Representación gráfica del trinomio ***$(a+b+c)^4$*** y del ***$(a+b+c)^5$***. A) Se representa el nivel 5 (en rojo) superpuesto al nivel 4 (en negro). B) La suma de los números en azul del nivel 4 dan como resultado el número en color verde del nivel 5 (4+4+12=20). De igual modo la suma de los números en color morado del nivel 4, y dan como resultado el número en color naranja del nivel 5 (12+12+6=30).

Sin embargo este método de obtención de coeficientes de un nivel se basaba en la representación gráfica y el conocimiento de los niveles anteriores. Para poder obtener un número sin conocer ningún otro nivel, ni superior ni inferior, descompusimos en factores primos todos los números de un nivel, y vimos que todos los números del interior del triángulo tenían un factor que era el número en el lateral. Es decir en el nivel

6, la fila [6, 30, 60, 60, 30, 6], tiene como máximo común divisor el número 6 y la fila [15, 60, 90, 60,15], el número 15 (Figura 7).

Esto nos lleva a la observación de que todos los coeficientes en el nivel de la pirámide están formados por la multiplicación de números existentes en el triángulo de Tartaglia.

La generalización de esta observación, permite obtener la fórmula que define el proceso. Escribiendo en negro los coeficientes referidos al triángulo equilátero que resuelve el trinomio de nivel 6 y en rojo el triángulo de Tartaglia del mismo nivel, observamos que por ejemplo, el 30 señalado en verde en la figura 7 corresponde a 6 x **5.,** es decir $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1}$.

							A							
							1							
						6		6						
					15		30		15					
				20		60		60		20				
			15		60		90		60		15			
		6		30		60		60		30		6		
	1		6		15		20		15		6		1	
B														C

							A							
							1.1							6
						6.1		6.1						5
					15.1		15.2		15.1					4
				20.1		20.3		20.3		20.1				3
			15.1		15.4		15.6		15.4		15.1			2
		6.1		6.5		6.10		6.10		6.5		6.1		1
	1.1		6.1		15.1		20.1		15.1		6.1		1.1	0
B	0		1		2		3		4		5		6	C

Figura 7. Representación gráfica del trinomio *(a+b+c)*^{6}. En la figura puede comprobarse como todos los coeficientes resultan de multiplicar el máximo común divisor de la fila que ocupa, es decir, el número que ocupa la posición más extrema (en negro en la figura inferior) por el número correspondiente del triángulo de Tartaglia que ocupa esa misma posición (en rojo en la figura inferior). En el ejemplo la multiplicación por el triángulo de Tartaglia del nivel 6 origina el triángulo equilátero de nivel 6 (arriba).

El término 90 marcado en rojo en la figura 7, corresponde a 15 x **6**, es decir $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}$.

Para poder encontrar una regla general, denominamos **"n"** al nivel al que elevamos el trinomio (en el caso anterior, n=6), **"l"** a la fila en la que se encuentra (en el caso anterior varía desde 0 hasta 6, en vertical) y **"k"** a la posición que tiene un número dentro de una fila (en el caso anterior varía desde 0 hasta 6, en diagonal hacia arriba a la derecha) (Figura 8, 9).

Ejemplos:

							A							
							1							
						6		6						
					15		30		15					
				20		60		60		20				
			15		60		90		60		15			
		6		30		60		60		30		6		
	1		6		15		20		15		6		1	
B					(2)									C

Figura 8. El término k se refiere a la posición de un término dentro de su fila. Se empieza a contar de 0 y siempre de izquierda a derecha. Todos los números en rojo corresponden con un valor de k = 2.

Explicación con coordenadas:

				A				
	n=3			(3,0)				3
			(2,0)		(2,1)			2
		(1,0)		(1,1)		(1,2)		1
	(0,0)		(0,1)		(0,2)		(0,3)	0
B	0		1		2		3	C

Figura 9. Representación por coordenadas (l, k). El término l indica, la fila que ocupa el número empezando por 0 desde la base. El paréntesis define entonces la coordenada del coeficiente como (l, k). En la figura se recoge también el valor de n que en el ejemplo concreto es 3.

Tomando como ejemplo el triángulo correspondiente al trinomio de nivel 6 (Figura 10), Vamos a coger un ejemplo para explicar el origen de nuestra fórmula:

							A							
							1.1							6
						6.1		6.1						5
					15.1		15.2		15.1					4
				20.1		20.3		20.3		20.1				3
			15.1		15.4		15.6		15.4		15.1			2
		6.1		6.5		6.10		6.10		6.5		6.1		1
	1.1		6.1		15.1		20.1		15.1		6.1		1.1	0
B	0		1		2		3		4		5		6	C

Figura 10. Representación del trinomio de nivel 6 $(a + b + c)^6$. El triángulo se corresponde con n = 6, los términos l se remarcan en morado (vertical) y los k en morado (horizontal).

El número 60 (20 x 3; en rojo en Figura 10) corresponde a

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2}$$

De donde se deduce que el número 6 corresponde al valor de **"n"**, el primer 3 corresponde al valor de **"l"**, el segundo 3 corresponde a **"n-l"** (6-3=3) y el número 2 corresponde al valor de **"k"**.

El número 60 (15 x 4; en verde en la figura 10) corresponde con

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1}$$

Siendo n = 6, l = 2, k = 1 y por tanto n-l = 4.

Una vez demostrado la generalidad de la fórmula conseguida, y volviendo al primer ejemplo, desarrollamos el producto.

$$\boxed{\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} \cdot \frac{(6-3)!}{2! \cdot (3-2)!}}$$

Simplificando, vemos que es igual a:

$$\boxed{\frac{6!}{3!} \cdot \frac{1}{2! \cdot (3-2)!}}$$

La resolución de esta fórmula nos da como resultado 60, que es de hecho el coeficiente que ocupa la posición indicada por el par (3, 2) en el trinomio de nivel 6 (figura 10).

Universalizando la fórmula utilizando los términos n, l, y k, se obtiene

$$\boxed{\binom{n}{l} \cdot \binom{n-l}{k} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \cdot \frac{(n-l)!}{k!(n-l-k)!} = \frac{n!}{l!} \cdot \frac{1}{k!(n-l-k)!} = \frac{n!}{l!k!(n-l-k)!}}$$

es decir,

$$\boxed{\frac{n!}{l!k!(n-l-k)!}}$$

Fórmula general que permite obtener todos los coeficientes de los posibles trinomios de Newton.

El desarrollo nos permite también demostrar que en la resolución del trinomio $\mathbf{(a + b + c)^n}$, los términos l, k y (n-l) de la ecuación se corresponden con el exponente de a, el de c, y el de b respectivamente.

Es decir que para el trinomio **$(a + b + c)^3$,** por ejemplo, el resultado sería:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3b^2a + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

4. CONCLUSIONES

1. Hemos desarrollado, basándonos en el triángulo de Tartaglia, una fórmula matemática general que permite la resolución de los trinomios independientemente de su grado.

2. Hemos comprobado empíricamente que la fórmula es válida y correcta, por lo que podemos asegurar que su aplicación es universal.

3. Hemos desarrollado un programa informático que permite la resolución rápida de cualquier trinomio conociendo solamente su nivel.

5. BIBLIOGRAFÍA

1. Vizmanos J.R., Anzola M., de los Saantos I., y Hervás J.C. Matemáticas Opción B. Editorial SM 2008.
2. Wikipedia

ANEXO

ANEXO 1

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2cb$

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3ab^2+3ac^2+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3bc^2$
$+6abc$

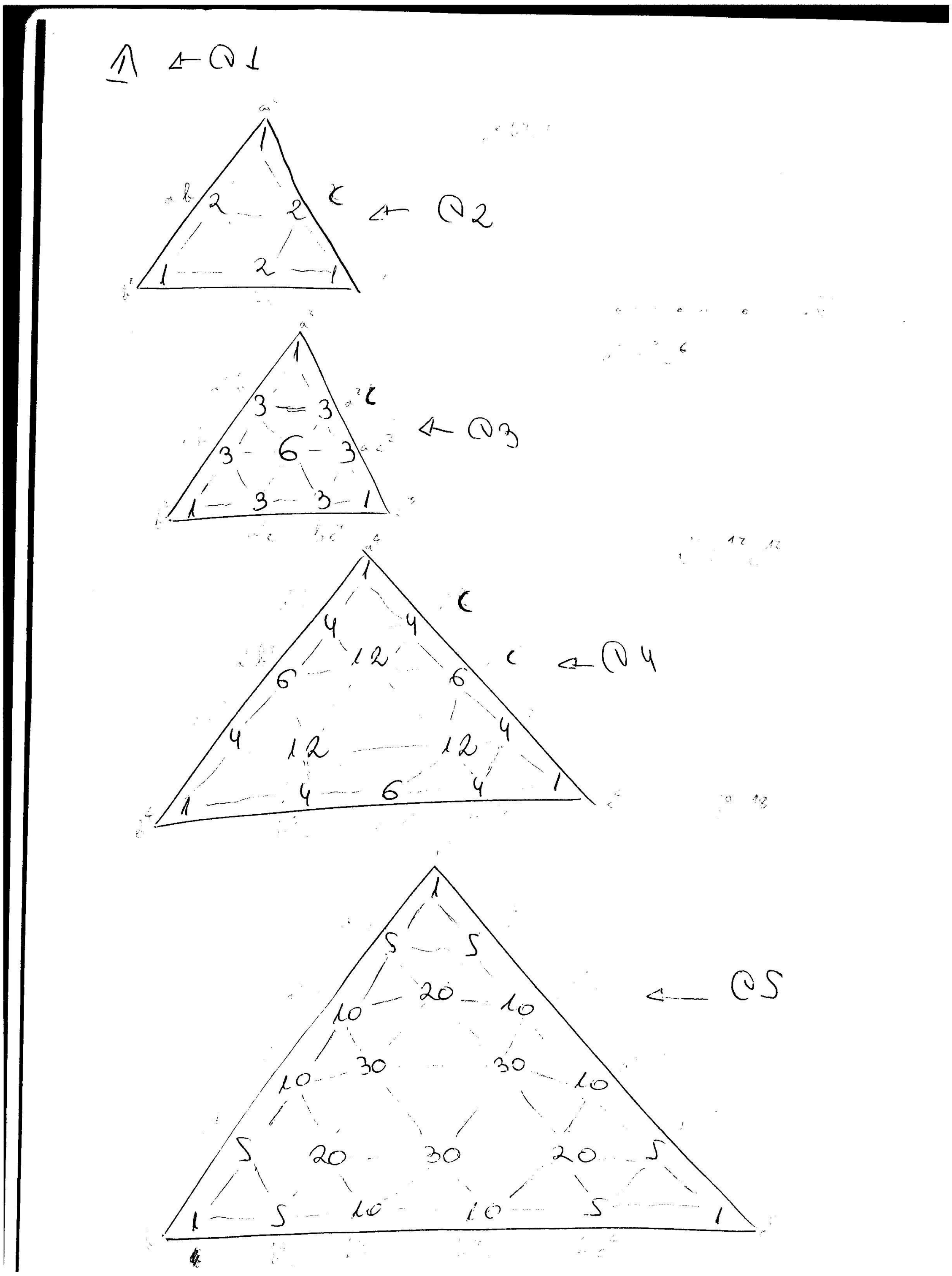
$(a+b+c)^4 = a^4+b^4+c^4+4a^3b+4a^3c+4ab^3+4b^3c+4ac^3+4bc^3$
$+6a^2b^2+6a^2c^2+6b^2c^2+12a^2bc+12ab^2c+12abc^2$

$(a+b+c)^5 = a^5+b^5+c^5+5a^4b+5a^4c+5ab^4+5b^4c+5ac^4+5bc^4+$
$+10a^3b^2+10a^2b^3+10a^2c^3+10a^3c^2+10b^2c^3+10b^3c^2$
$+20a^3bc+20ab^3c+20abc^3+30a^2b^2c+30a^2bc^2+$
$+30ab^2c^2$

$(a+b+c)^6 = a^6+b^6+c^6+6ab^5+6ac^5+6a^5b+6bc^5+6a^5c+6b^5c+$
$+15b^4c^2$
$+15a^2b^4+15a^2c^4+15a^4b^2+15a^4c^2+15b^2c^4+20a^3b^3+20a^3c^3+$
$+20b^3c^3+30ab^4c+30a^4bc+30abc^4+60ab^2c^3+60ab^3c^2+60a^2b^3c$
$+60a^2bc^3+60a^3b^2c+60a^3bc^2+90a^2b^2c^2$

$(a+b+c)^7 = a^7+b^7+c^7+7ab^6+7ac^6+7a^6b+7a^6c+7b^6c+7bc^6+21a^2b^5+21a^5b^2+21a^2c^5+$
$+21a^5c^2+21b^2c^5+21b^5c^2+35a^3b^4+35a^4b^3+35a^3c^4+35a^4c^3+35b^3c^4+35b^4c^3+$
$+42abc^5+42ab^5c+42a^5bc+105ab^2c^4+105a^2bc^4+105a^4bc^2+105a^4b^2c+$
$+105a^2b^4c+105ab^4c^2+140ab^3c^3+140a^3bc^3+140a^3b^3c+210a^2b^2c^3+$
$+210a^2b^3c^2+210a^3b^2c^2$

ANEXO 2


1
1
2 2
1 2 1
1
3 3
3 6 3
1 3 3 1
1
4 4
6 12 6
4 12 12 4
1 4 6 4 1
1
5 5
10 20 10
10 30 30 10
5 20 30 20 5
1 5 10 10 5 1

ANEXO 3

para hallar el coeficiente utilizamos la fórmula:

$$\boxed{\binom{n}{l} \cdot \frac{(n-l)!}{K!(n-l-K)!}}$$

para hallar los exponentes de a, b, c, utilizamos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{expon. } a = l \\ \text{expon. } c = K \\ \text{expon. } b = (n-l-K) \end{array}}$$

$n = 15$

$l = 10$

$K = 3$

$$\binom{15}{10} \cdot \frac{(15-10)!}{3! \cdot (15-10-3)!} = 3003 \cdot \frac{120}{6 \cdot 2} = 3003$$

$= 30030$

$30030\, a^{10} b^{2} c$

$l = 10$ = expon. a

$K = 3$ = expon. c

$(n-l-K) = 2$ = expon. b