Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Octava Edición, 2013/2014

TRABAJO: Superficies

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE BACHILLERATO

AUTORES:

- Gaspar Alfaro García
- Laura García Montero
- Carlos de la Iglesia Cañones
- Salvador Nieto Garrido
- Miguel Serrano Fuentes

TUTOR:

- Miguel Sierra Serrano

CENTRO: I.E.S. Doctor Marañón (Alcalá de Henares, Madrid)

SUPERFICIES

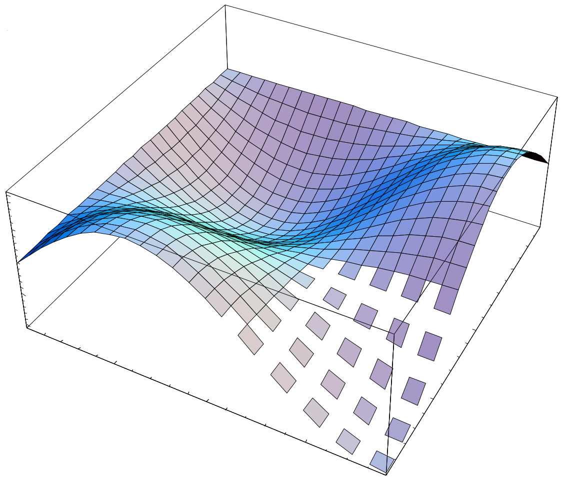
GRUPO: SUPERFICIES

NIVEL: 1º Y 2º DE BACHILLERATO

ÍNDICE

A INTRODUCCION Y ANTECEDENTES

El estudio de los elementos en el espacio: puntos, rectas y planos junto con la utilización de programas de visualización de figuras en el espacio nos han permitido observar la representación de algunas funciones de dos variables.
Estas representaciones calculan los valores de una función sobre los puntos del plano situados en una red de cuadrados y por lo tanto la superficie se construye formando la red correspondiente de cuadriláteros en el espacio.



Estos cuadriláteros, en general, no puede ser planos, aunque los programas de representación les asignan un color uniforme dando la impresión de que sí lo son.
Esta observación nos llevó buscar una representación alternativa (no necesariamente mejor) en la que los cuadriláteros que representan la superficie sean planos, es decir, que sean un trozo de plano.

B OBJETIVOS

1. Estudio del plano tangente a una función $z = f(x, y)$ en un punto $P(a, b, f(a, b))$
2. Representación gráfica de una superficie utilizando los planos tangentes en cada punto. Para ello crearemos una red de cuadrados no contiguos en el plano OXY y sobre éstos colocaremos los prismas que tengan en su cara superior la inclinación del plano tangente a la superficie en su punto central. Controlando la distancia entre los cuadrados de la base obtendremos una imagen aproximada de la superficie.
3. Construir una maqueta de la superficie utilizando nuestro método

C RESULTADOS

C1 PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE.

C11 RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO.

Consideremos la curva y = f(x) y un punto P(a, f(a)) de la misma.

La pendiente de la recta tangente a la curva y = f(x) en el punto P es:

$$m = f'(a)$$

La ecuación de la recta tangente , en forma punto pendiente, es

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

La ecuación en forma continua de la recta

$$\frac{x-a}{1} = \frac{y-f(a)}{f'(a)}$$

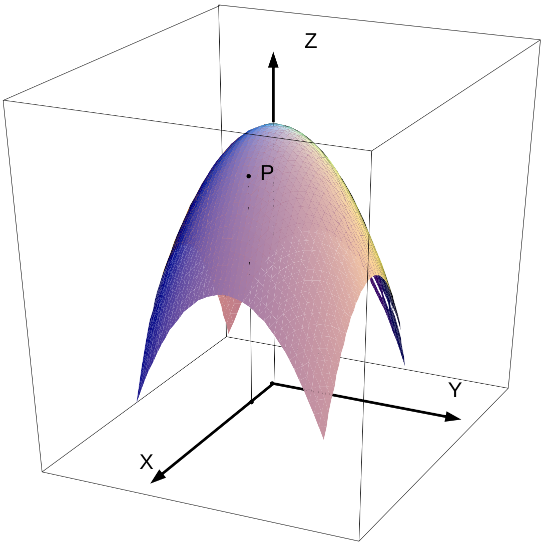
El vector director de la recta tangente es

$$\mathbf{v}(1, f'(a))$$

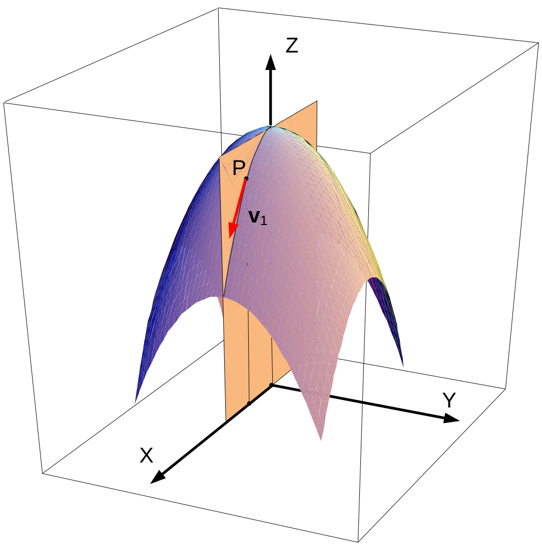
(Si $f'(a) = 0$, entonces y = f(a) que es una recta horizontal con vector director **v**(1, 0))

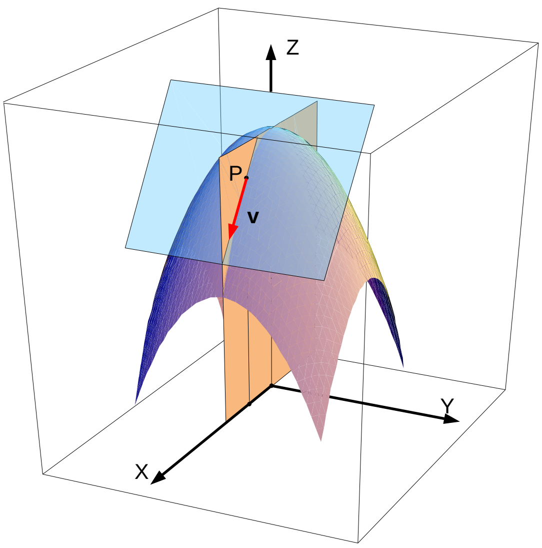
C12 PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE EN EL ESPACIO

Consideremos la superficie z = f(x, y) y un punto P(a, b, f(a, b)) de la misma.



Si ahora dejamos fijo b la función $z = f(x, b) = f_1(x)$ es una curva contenida en la superficie S. Es la intersección de la superficie S con el plano vertical y = b



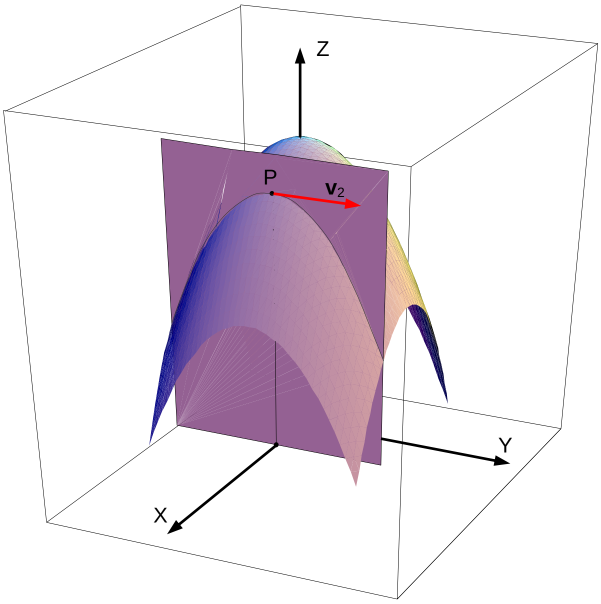


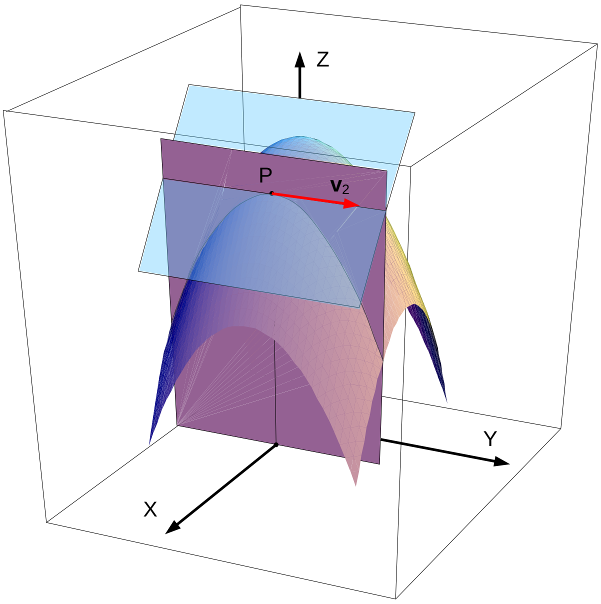
El vector director de la recta tangente a $f_1(x)$ en el punto P es

$$\mathbf{v}_1(1,\ 0,\ f_1'(a))$$

Este vector está contenido en el plano tangente a la superficie S en el punto P y por lo tanto se puede considerar como uno de sus vectores directores.

Análogamente si dejamos fijo x = a, la función $z = f(a, y) = f_2(y)$ representa la curva intersección de la superficie S con el plano x = a.





El vector director de la recta tangente a $z = f_2(y)$ en el punto P es

$$\mathbf{v}_2(0,\ 1,\ f_2'(b))$$

El plano tangente a la superficie S en el punto P tiene determinación lineal

$$\pi : (P, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

La ecuación paramétrica del plano tangente a la superficie S en el punto P es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + \mu \\ z = f(a,b) + \lambda f_1'(a) + \mu f_2'(b) \end{cases} \qquad (\lambda\ ,\ \mu \in \mathrm{IR})$$

Ejemplo Si la superficie S tiene ecuación $z = f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ (Es la superficie de las figuras anteriores) y queremos calcular la ecuación del plano tangente en el punto P que tiene coordenadas x = 1 e y = 0.
Primero calculamos la tercera coordenada del punto P

$$z = f(1, 0) = 8 - 1^2 - 0^2 = 7 \quad \Rightarrow P(1, 0, 7)$$

Ahora fijamos la segunda coordenada de P : y = 0 y obtenemos la función:

$$z = f_1(x) = f(x, 0) = 8 - x^2 - 0^2 = 8 - x^2.$$

$f_1(x)$ es una parábola incluida en la superficie S. Es la intersección de S con el plano y = 0 (Plano OXZ).

Calculamos la pendiente m_1 de esta parábola en el punto P.

$$m_1 = f_1'(1)$$
$$f_1'(x) = -2x \qquad \Rightarrow \quad m_1 = f_1'(1) = -2$$

El vector director de la recta tangente a f_1 (x) en P es:

$\mathbf{v}_1$ (1, 0, m_1) = $\mathbf{v}_1$ (1, 0, -2)

Ahora fijamos la primera coordenada de P : x = 1 y obtenemos la función:

$z = f_2 (y) = f(1, y) = 8 - 1^2 - y^2 = 7 - y^2$.

f_1 (x) es otra una parábola incluida en la superficie S. Es la intersección de S con el plano x = 1 (Plano paralelo OYZ).

Calculamos la pendiente m_2 de esta parábola en el punto P.

$m_2 = f_2'(0)$

$f_2'(y) = - 2y \quad \Rightarrow \quad m_2 = f_2'(0) = - 2 \cdot 0 = 0.$

El vector director de la recta tangente a $z = f_2$ (x) en P es:

$\mathbf{v}_2$ (0, 1, m_2) = $\mathbf{v}_2$ (0, 1, 0)

El plano tangente a la superficie S en el punto P tiene determinación lineal

π : (P(1, 0, 7), $\mathbf{v}_1$(1, 0, -2) $\mathbf{v}_2$(0, 1, 0))

La ecuación paramétrica del plano tangente a la superficie S en el punto P es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \mu \\ z = 7 - 2\lambda \end{cases}$$

C13 NUESTRA SUPERFICIE

Consideremos la superficie S : $\boxed{z = f(x, y) = z_0 + A \operatorname{sen}(kx) \cos(ky)}$ y un punto P(a, b, f(a, b)) de la misma.

Si dejamos fijo y = b obtenemos la función

$z = f(x, b) = f_1(x) = z_0 + A \operatorname{sen}(kx) \cos(kb)$

Su derivada es : $\boxed{f_1'(x) = Ak \cos(kx) \cos(kb)}$

La pendiente de la recta tangente a la curva $z = f_1(x)$ en P es $m_1 = f_1'(a)$

El primer vector director del plano tangente a la superficie S en el punto P es

$\mathbf{v}_1(1, 0, f_1'(a))$

Análogamente si dejamos fijo x = a, obtenemos la función

$z = f(a, y) = f_2(y) = z_0 + A \operatorname{sen}(ka) \cos(ky)$

Su derivada es: $\boxed{f_2'(y) = -Ak \operatorname{sen}(ka) \operatorname{sen}(ky)}$

La pendiente de la recta tangente a la curva $z = f_2(y)$ en el punto P es $m_2 = f_2'(b)$

El segundo vector director del plano tangente a S en P es:

$\mathbf{v}_2(0, 1, f_2'(b))$

El plano tangente a la superficie S en el punto P tiene determinación lineal

$$\pi : (P, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

La ecuación paramétrica del plano tangente a la superficie S en el punto P es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + \mu \\ z = f(a,b) + \lambda f_1´(a) + \mu f_2´(b) \end{cases} \qquad (\lambda \text{ , } \mu \in IR)$$

Nos interesa saber la tercera coordenada z_0 de un punto cualquiera de este plano conociendo sus dos primeras coordenadas x_0 e y_0.

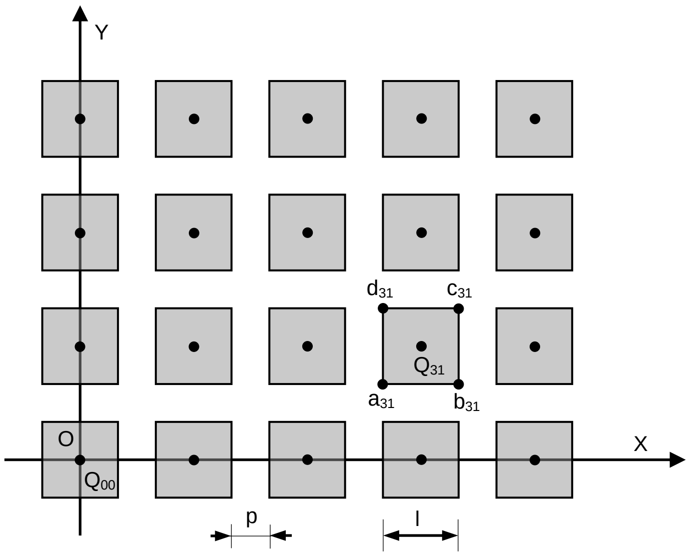
$$\begin{cases} x_0 = a + \lambda \\ y_0 = b + \mu \\ z_0 = f(a,b) + \lambda f_1´(a) + \mu f_2´(b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = x_0 - a \\ \mu = y_0 - b \\ \boxed{z_0 = f(a,b) + (x_0 - a)f_1´(a) + (y_0 - b)f_2´(b)} \end{cases}$$

Llamemos a esta función $z_0(x_0, y_0)$

C2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

C21 COORDEDADAS DE LOS PUNTOS

Ahora definimos en el plano OXY una red de cuadrados como base de la superficie. Los centros de estos cuadrados los llamaremos Qij haciendo coincidir el Q_{00} con el origen de coordenadas.



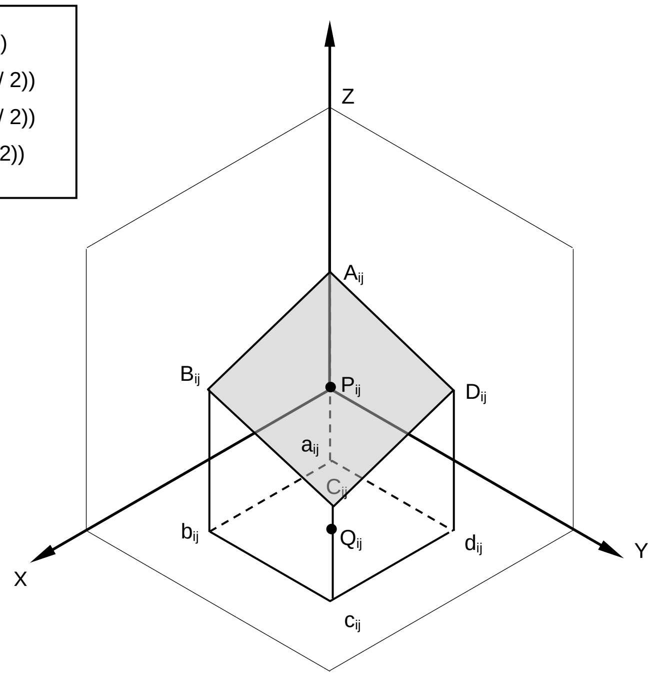
Llamaremos **l** al **lado** de cada cuadrado y llamaremos **p** (**paso**) a la distancia entre dos cuadrados consecutivos.
La distancia entre los centros de dos cuadrados consecutivos es **d** = p + l.

Las coordenadas de los centros son $Q_{ij}(\ (i - 1) \cdot d\ ,\ (j - 1) \cdot d)$ $(i = 1, 2, 3, ... \quad j = 1, 2, 3\ ,...)$
Las coordenadas de los vértices de los cuadrados son:

$$a_{ij}(\ (i - 1) \cdot d - l / 2,\ (j - 1) \cdot d - l / 2)$$
$$b_{ij}(\ (i - 1) \cdot d + l / 2\ ,\ (j - 1) \cdot d - l / 2)$$
$$c_{ij}(\ (i - 1) \cdot d + l / 2,\ (j - 1) \cdot d + l / 2)$$
$$d_{ij}(\ (i - 1) \cdot d - l / 2,\ (j - 1) \cdot d + l / 2)$$

Las coordenadas de los puntos de la superficie son $P_{ij}\ ((i - 1) \cdot d\ ,\ (j - 1) \cdot d,\ f((i - 1) \cdot d\ ,\ (j - 1) \cdot d))$
Las coordenadas de los puntos del plano tangente a f(x, y) en P_{ij} correspondientes a los vértices de cada cuadrado son:

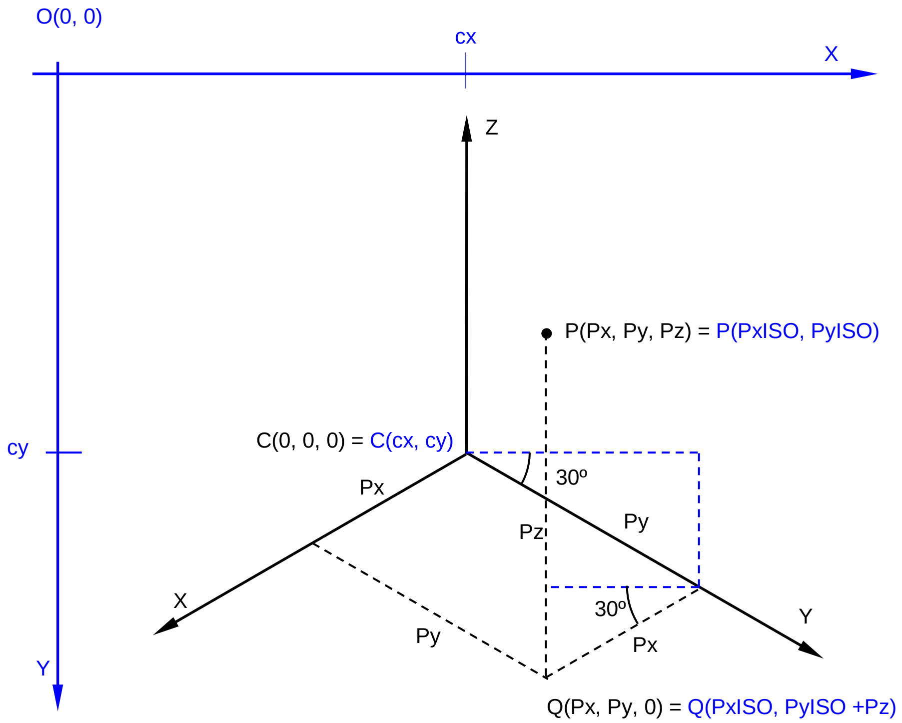
$$A_{ij}(\ (i - 1) \cdot d - l / 2,\ (j - 1) \cdot d - l / 2,\ z_0((i - 1) \cdot d - l / 2,\ (j - 1) \cdot d - l / 2))$$
$$B_{ij}(\ (i - 1) \cdot d + l / 2\ ,\ (j - 1) \cdot d - l / 2,\ z_0\ ((i - 1) \cdot d + l / 2\ ,\ (j - 1) \cdot d - l / 2))$$
$$C_{ij}(\ (i - 1) \cdot d + l / 2,\ (j - 1) \cdot d + l / 2,\ z_0\ ((i - 1) \cdot d + l / 2,\ (j - 1) \cdot d + l / 2))$$
$$D_{ij}(\ (i - 1) \cdot d - l / 2,\ (j - 1) \cdot d + l / 2,\ z_0\ ((i - 1) \cdot d - l / 2,\ (j - 1) \cdot d + l / 2))$$



C22 COORDENADAS EN EL PLANO DE UN PUNTO EN PERSPECTIVA ISOMÉTRICA

La perspectiva isométrica para representar en el plano puntos en el espacio utiliza 3 ejes formando ángulos de 120º entre sí con origen común en un punto C.

Un punto en el espacio de coordenadas P(Px, Py, Pz) se representa midiendo (sin reducciones) sobre los ejes OX, OY y OZ las coordenadas Px, Py y Pz respectivamente y colocando P en el vértice opuesto al origen C del paralelepípedo que forman las coordenadas.



Si las coordenadas en el plano OXY del punto C son C(cx, cy) entonces las coordenadas de P en dicho plano son:

$$PxISO = cx + Py \cos 30º - Px \cos 30º = cx + (Py - Px) \cos 30º = cx + \frac{\sqrt{3}}{2} (Py - Px) = cx + 0.866\,(Py - Px)$$

$$PyISO = cy + Py \operatorname{sen} 30º + Px \operatorname{sen} 30º - Pz = cy + (Px + Py) \operatorname{sen} 30º - Pz = cy + 0.5\,(Px + Py) - Pz.$$

Las coordenadas en el espacio de la proyección ortogonal del punto P sobre el plano OXY son Q(Px, Py, 0) y las correspondientes coordenadas en el plano son

$$QxISO = PxISO$$

$$QyISO = cy + Py \operatorname{sen} 30º + Px \operatorname{sen} 30º = cy + (Px + Py) \operatorname{sen} 30º = cy + 0.5\,(Px + Py).$$

C23 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Las fórmulas anteriores nos permiten hacer un programa en el módulo de Visual Basic que tiene integrado Word que dibuja nuestra función.

Para nuestro dibujo queremos que los cuadrados de la base formen un cuadrado de lado fijo (**Lado** = 283 puntos de pantalla).

El número de cuadrados va a ser 10 x 10 (**i** = 10, **j** = 10)

Además la distancia entre cuadrados (p) va a ser la quinta parte del lado de cada cuadrado (l), es decir , $p = \frac{l}{5}$

Debe cumplirse que $10\,l + 9\,p = \text{Lado} \Rightarrow 10\,l + 9\,\frac{l}{5} = \text{Lado} \Rightarrow \frac{50l + 9l}{5} = \text{Lado} \Rightarrow \frac{59l}{5} = \text{Lado} \Rightarrow \boxed{l = \frac{5 \cdot \text{Lado}}{59}}$

Por otra parte queremos que las funciones trigonométricas recorran 3/4 de su periodo (2 π) a lo lardo de la distancia L, por lo tanto

$$k \cdot \text{Lado} = \frac{3}{4}\,2\,\pi \Rightarrow k = \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot \text{Lado}} = \frac{1.5 \cdot 3.141}{\text{Lado}}$$

Para determinar la amplitud A imponemos la siguiente proporción (La hemos elegido probando para que la superficie quedara más "suave")

$$\frac{1}{3 \cdot \pi} = \frac{A}{\text{Lado}} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\text{Lado}}{3 \cdot \pi}}$$

```
Function f(x, y)
Lado = 283
k = 1.5 * 3.141 / Lado
A = Lado / (2 * 1.5 * 3.141)
z0 = 1.5 * A
f = z0 + A * Sin(k * x) * Cos(k * y)
End Function
```

Definición de la función f(x, y)

```
Function df1(x, y)
Lado = 283
k = 1.5 * 3.141 / Lado
A = Lado / (2 * 1.5 * 3.141)
df1 = A * k * Cos(k * x) * Cos(k * y)
End Function
```

Definición de la función $f_1(x, y)$

```
Function df2(x, y)
Lado = 283
k = 1.5 * 3.141 / Lado
A = Lado / (2 * 1.5 * 3.141)
df2 = -A * k * Sin(k * x) * Sin(k * y)
End Function
```

Definición de la función $f_2(x, y)$

```
Sub Macro1()
'
' Macro1 Macro
' Macro grabada el 24/04/2014 por Miguel
'
  ' Lado de la base
  Lado = 283

  ' Lado del cuadrado
  l = 5 * Lado / 59

  ' Paso
  p = l / 5

  ' Centro de la pantalla
  cx = 294
  cy = 260

  ' Distancia entre los centros de los cuadrados
  d = l + p

  For i = 1 To 10
  For j = 1 To 10

  Qx = (i - 1) * d
  Qy = (j - 1) * d
  Qz = f(Qx, Qy)
```

Coordenadas del punto P

```
  Ax = Qx - l / 2
  Ay = Qy - l / 2
  Az = Qz + (Ax - Qx) * df1(Qx, Qy) + (Ay - Qy) * df2(Qx, Qy)

  Bx = Qx + l / 2
  By = Qy - l / 2
  Bz = Qz + (Bx - Qx) * df1(Qx, Qy) + (By - Qy) * df2(Qx, Qy)

  Cx = Qx + l / 2
  Cy = Qy + l / 2
  Cz = Qz + (Cx - Qx) * df1(Qx, Qy) + (Cy - Qy) * df2(Qx, Qy)

  Dx = Qx - l / 2
  Dy = Qy + l / 2
  Dz = Qz + (Dx - Qx) * df1(Qx, Qy) + (Dy - Qy) * df2(Qx, Qy)
```

Coordenadas de los puntos A, B, C y D

```
  ' Este bloque calcula las posiciones x e y en perspectiva isométrica de los puntos A, B, C y D
  axISO = 294 + 0.866 * (Ay - Ax)
  ayISO = 260 + 0.5 * (Ax + Ay)

  bxISO = 294 + 0.866 * (By - Bx)
  byISO = 260 + 0.5 * (Bx + By)
```

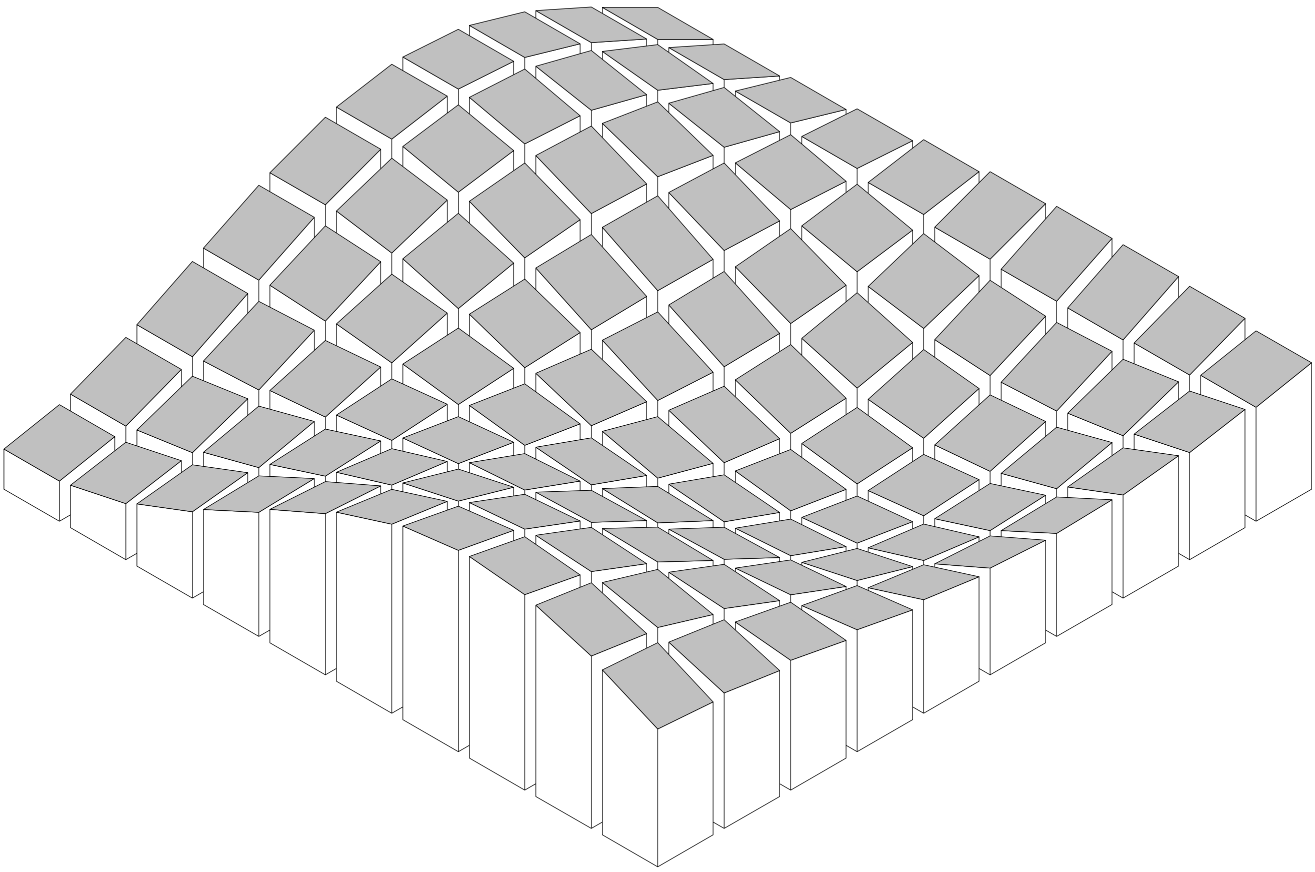
Coordenadas isométricas en el plano de los puntos A y B

```
    cxISO = 294 + 0.866 * (Cy - Cx)
    cyISO = 260 + 0.5 * (Cx + Cy)

    dxISO = 294 + 0.866 * (Dy - Dx)
    dyISO = 260 + 0.5 * (Dx + Dy)

    ' Este bloque dibuja las caras laterales de cada prismas
     With ActiveDocument.Shapes.BuildFreeform(msoEditingAuto, bxISO, byISO)
        .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, cxISO, cyISO
        .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, dxISO, dyISO
        .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, dxISO, dyISO - Dz
        .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, cxISO, cyISO - Cz
        .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, bxISO, byISO - Bz
        .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, bxISO, byISO
        .ConvertToShape.Select
    End With
    Selection.ShapeRange.Fill.ForeColor.RGB = RGB(255, 255, 255)
    Selection.ShapeRange.Line.Weight = 0.25

    ActiveDocument.Shapes.AddLine(cxISO, cyISO, cxISO, cyISO - Cz).Select
    Selection.ShapeRange.Line.Weight = 0.25

    'Este bloque dibuja la tapa superior de cada prisma
    With ActiveDocument.Shapes.BuildFreeform(msoEditingAuto, bxISO, byISO - Bz)
        .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, cxISO, cyISO - Cz
        .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, dxISO, dyISO - Dz
        .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, axISO, ayISO - Az
        .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, bxISO, byISO - Bz
        .ConvertToShape.Select
    End With
    Selection.ShapeRange.Fill.ForeColor.RGB = RGB(192, 192, 192)
    Selection.ShapeRange.Line.Weight = 0.25

    Next j
    Next i

End Sub
```

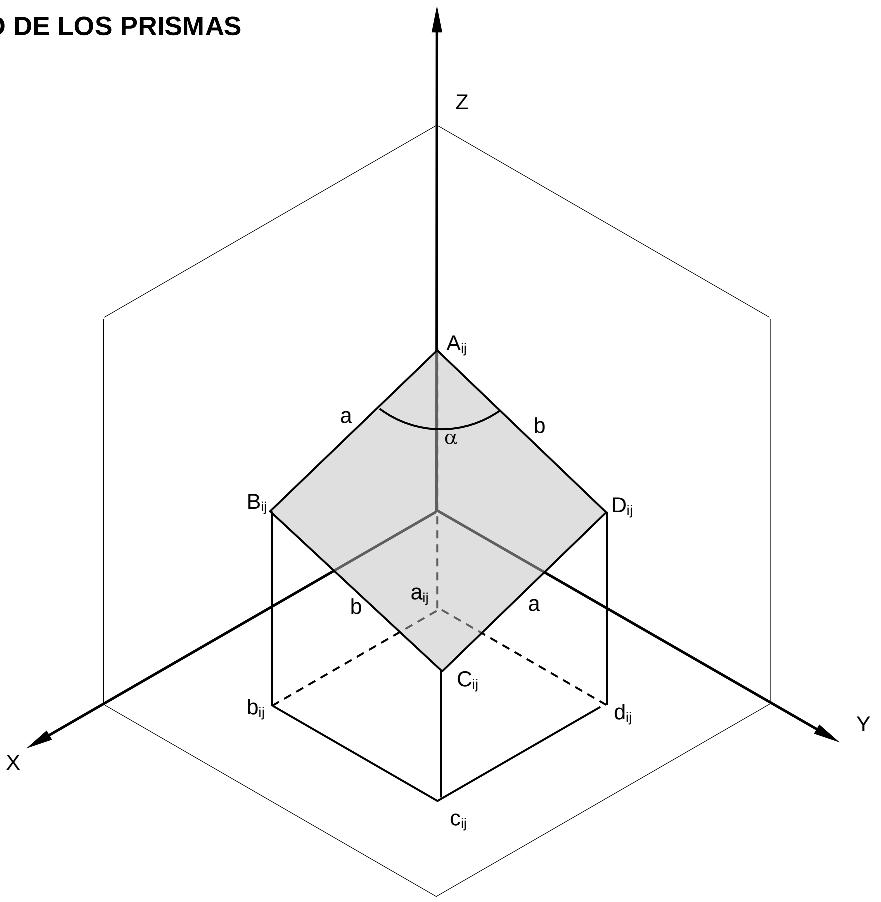
Coordenadas isométricas en el plano de los puntos A y B

Órdenes graficas que dibujan la superficie con las coordenadas anteriores

El resultado es el siguiente gráfico vectorial que se puede agrupar y escalar.



C3 DESARROLLO DE LOS PRISMAS

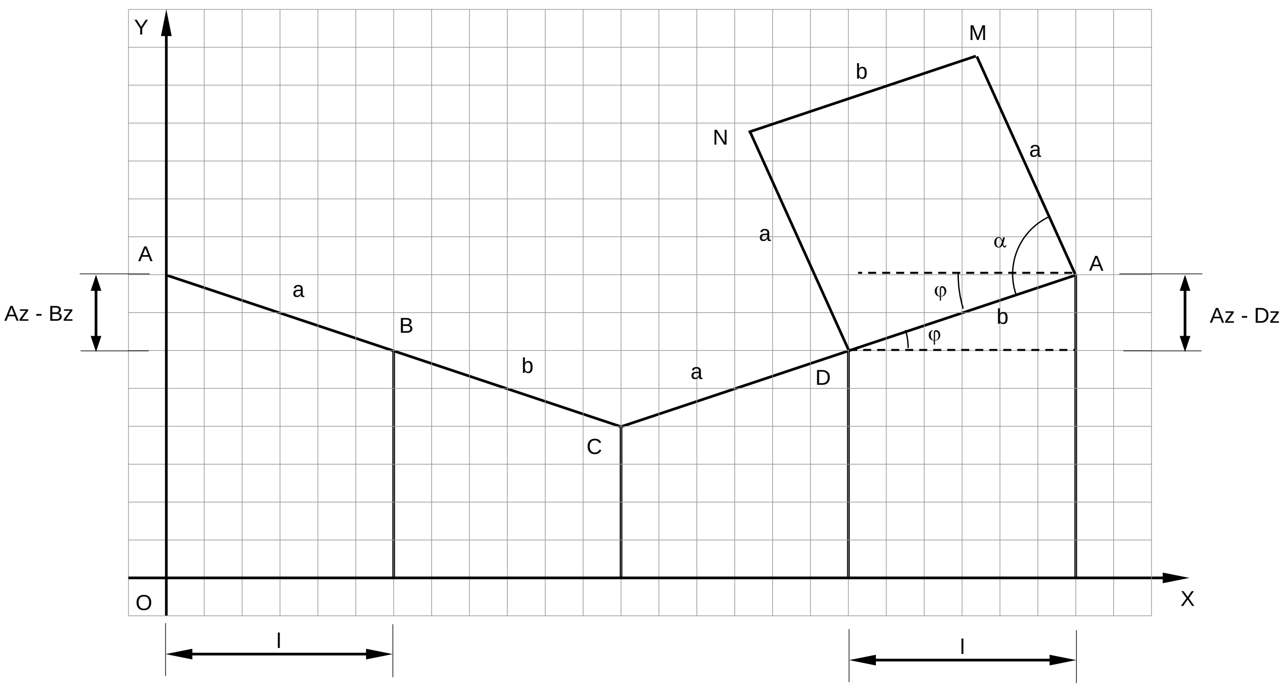


Nota. Por comodidad de notación pondremos A_{ij} = A con coordenadas A(Ax, Ay, Az) y análogamente con los punto B, C y D.

Cada prisma es recto de base cuadrada y sus caras laterales son paralelas 2 a 2. Cualquier plano que corta a dos paralelos forma sobre éstos rectas paralelas.

Por esta razón los lados opuestos del cuadrilátero que resulta de intersecar nuestro prisma por el plano tangente son paralelos y forman un **paralelogramo**.

Ahora podemos dibujar el desarrollo plano de la figura en un sistema de ejes coordenados del plano



Cálculo de α, a y b.

Para calcular α en el espacio utilizamos el producto escalar en el espacio.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \Rightarrow \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

α es el ángulo formado por los vectores **AB**(Bx-Ax, By-Ay, Bz-Az) y **AD**(Dx-Ax, Dy-Ay, Dz-Az)

$$\cos\alpha = \frac{AB \cdot AD}{|AB| \cdot |AD|} = \frac{(Bx-Ax)\cdot(Dx-Ax)+(By-Ay)\cdot(Dy-Ay)+(Bz-Az)\cdot(Dz-Az)}{\sqrt{(Bx-Ax)^2+(By-Ay)^2+(Bz-Az)^2}\cdot\sqrt{(Dx-Ax)^2+(Dy-Ay)^2+(Dz-Az)^2}} \Rightarrow \alpha = \arccos(\cos\alpha)$$

$$a = \sqrt{l^2+(Az-Bz)^2}$$

$$b = \sqrt{l^2+(Az-Dz)^2}$$

Coordenadas del punto M

Necesitamos el ángulo φ.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Az-Dz}{l} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{Az-Dz}{l}$$

$M(m_1, m_2)$ con $m_1 = 4l - a\cos(\alpha-\varphi)$

$m_2 = Az + a\,\mathrm{sen}(\alpha-\varphi)$

Coordenadas del punto N.

$N(n_1, n_2)$ $n_1 = m_1 - l$

$n_2 = m_2 - (Az - Dz)$

Utilizando las fórmulas de las coordenadas de los puntos de los vértices calculadas en las secciones anteriores y añadiendo las calculadas ahora obtenemos un programa muy parecido al anterior que permite generar el desarrollo plano de cada prisma que compone nuestra superficie

```
Function f(x, y)
Lado = 41.3
k = 1.5 * 3.141 / Lado
A = Lado / (3 * 3.141)
z0 = 1.5 * A
f = z0 + A * Sin(k * x) * Cos(k * y)
End Function

Function df1(x, y)
Lado = 41.3
k = 1.5 * 3.141 / Lado
A = Lado / (3 * 3.141)
df1 = A * k * Cos(k * x) * Cos(k * y)
End Function

Function df2(x, y)
Lado = 41.3
k = 1.5 * 3.141 / Lado
A = Lado / (3 * 3.141)
df2 = -A * k * Sin(k * x) * Sin(k * y)
End Function

Function Acos(x)
Acos = Atn(-x / Sqr(-x * x + 1)) + 2 * Atn(1)
End Function

Sub Macro1()
'
' Macro1 Macro
' Macro grabada el 26/04/2014 por Miguel
'
  e = 28.35

  ' Lado del cuadrado
  l = 3.94

  ' Paso
  p = 0.5

  ' Distancia entre los centros de los cuadrados
  d = l + p

  ' For i = 1 To 10
  ' For j = 1 To 10

 i = 6
 j = 4
```

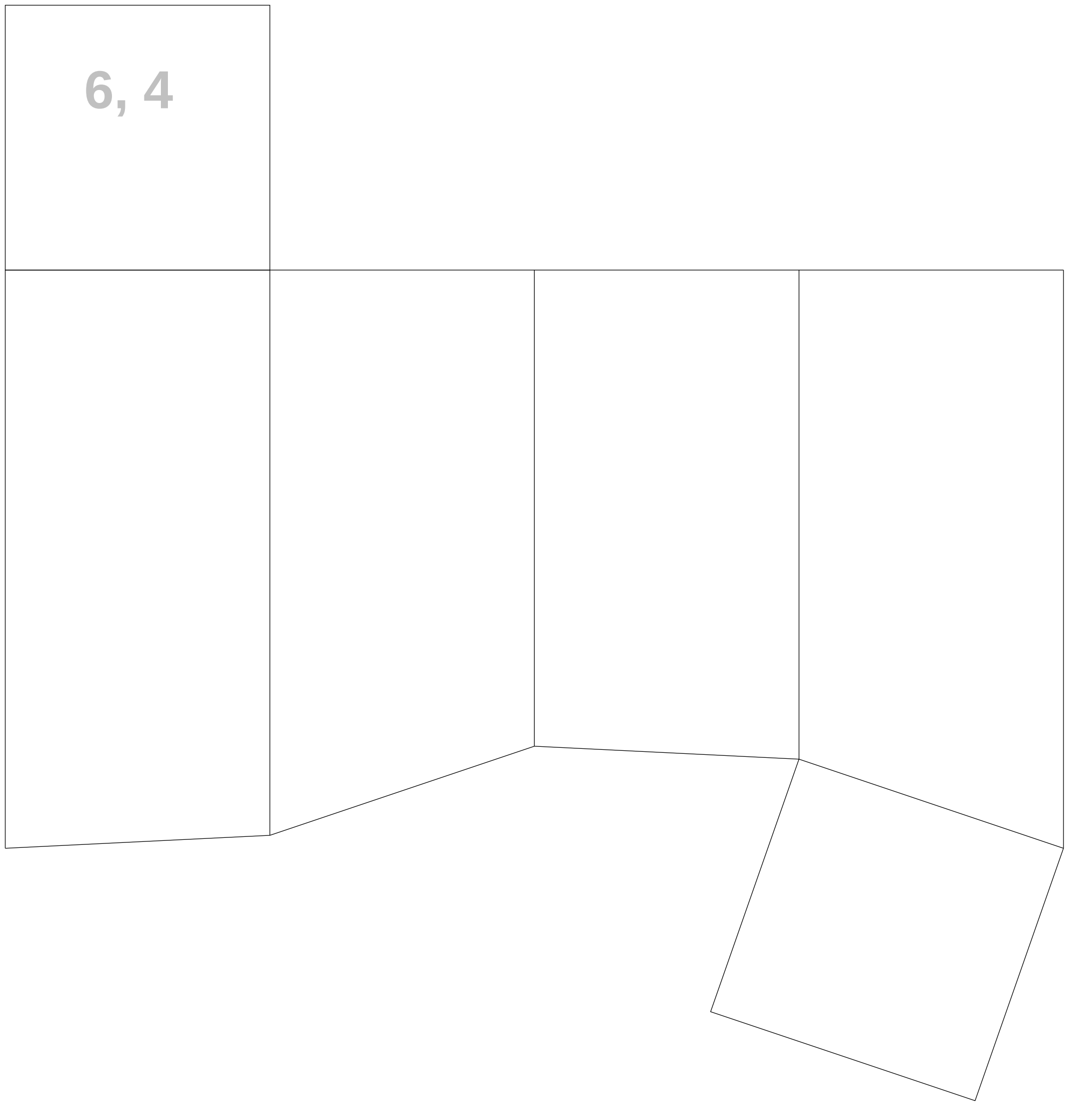
Este número es la cantidad de puntos de pantalla que completan 1 centímetro y permite que el dibujo se imprima en centímetros

Cambiando los valores de i y de j podemos generear el desarrollo del prisma correspondiente.

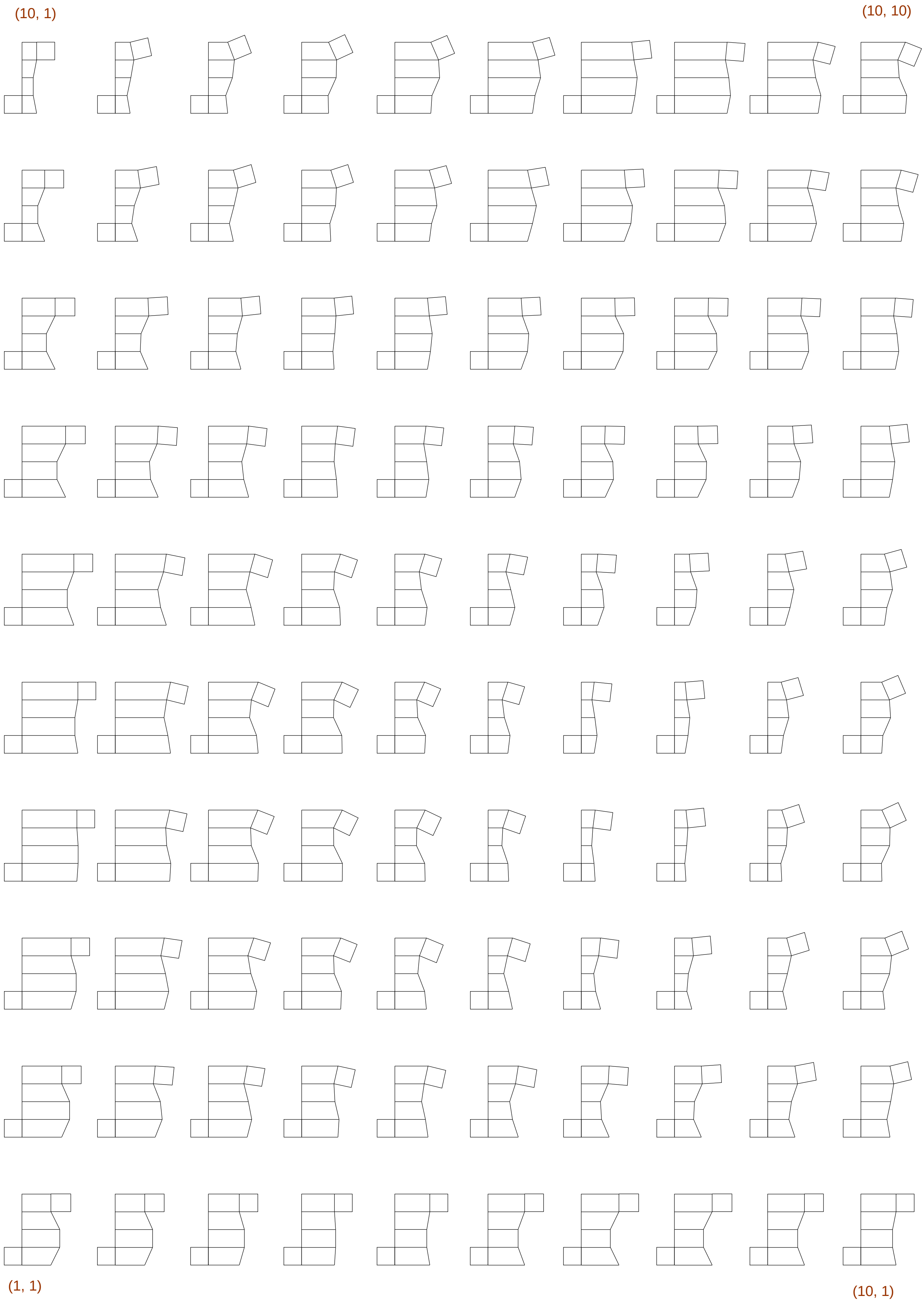
```
 ' Etiqueta

   Texto = Str(i) + "," + Str(j)
   ActiveDocument.Shapes.AddTextbox(msoTextOrientationHorizontal, 2 * e, 2 * e, 50, 20).Select
   Selection.ShapeRange.TextFrame.TextRange.Select
   Selection.Collapse
   Selection.ShapeRange.Line.Visible = msoFalse
   Selection.ShapeRange.Fill.Visible = msoFalse
   Selection.ParagraphFormat.Alignment = wdAlignParagraphCenter
   Selection.TypeText Text:=Texto

  ' Coordenadas de los puntos Q, A, B, C y D

   Qx = (i - 1) * d
   Qy = (j - 1) * d
   Qz = f(Qx, Qy)

   Ax = Qx - l / 2
   Ay = Qy - l / 2
   Az = Qz + (Ax - Qx) * df1(Qx, Qy) + (Ay - Qy) * df2(Qx, Qy)

   Bx = Qx + l / 2
   By = Qy - l / 2
   Bz = Qz + (Bx - Qx) * df1(Qx, Qy) + (By - Qy) * df2(Qx, Qy)

   Cx = Qx + l / 2
   Cy = Qy + l / 2
   Cz = Qz + (Cx - Qx) * df1(Qx, Qy) + (Cy - Qy) * df2(Qx, Qy)

   Dx = Qx - l / 2
   Dy = Qy + l / 2
   Dz = Qz + (Dx - Qx) * df1(Qx, Qy) + (Dy - Qy) * df2(Qx, Qy)

  ' Ángulo beta (=φ) y lados a y b de la tapa superior
   beta = Atn((Az - Dz) / l)
   a = Sqr((Bz - Az) ^ 2 + l ^ 2)
   b = Sqr((Cz - Bz) ^ 2 + l ^ 2)

  ' Ángulo alfa
   cosalfa = ((Bx - Ax) * (Dx - Ax) + (By - Ay) * (Dy - Ay) + (Bz - Az) * (Dz - Az)) / _
                  (Sqr((Bx - Ax) ^ 2 + (By - Ay) ^ 2 + (Bz - Az) ^ 2) * Sqr((Dx - Ax) ^ 2 + (Dy - Ay) ^ 2 + (Dz - Az) ^ 2))
   alfa = Acos(cosalfa)

   ' Coordenadas de los punto M y N
   m1 = 4 * l - a * Cos(alfa - beta)
   m2 = Az + a * Sin(alfa + beta)

   n1 = m1 - l
   n2 = m2 - (Az - Dz)

   'Cuadrado de la base
     ActiveDocument.Shapes.AddShape(msoShapeRectangle, 2 * e, 2 * e, l * e, l * e).Select
   Selection.ShapeRange.Line.Weight = 0.25
   Selection.ShapeRange.Fill.Visible = msoFalse

   'linea de las bases superiores
   With ActiveDocument.Shapes.BuildFreeform(msoEditingAuto, 2 * e, 2 * e + l * e + Az * e)
       .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, 2 * e + l * e, 2 * e + l * e + Bz * e
       .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, 2 * e + 2 * l * e, 2 * e + l * e + Cz * e
       .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, 2 * e + 3 * l * e, 2 * e + l * e + Dz * e
       .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, 2 * e + 4 * l * e, 2 * e + l * e + Az * e
       .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, 2 * e + m1 * e, 2 * e + l * e + m2 * e
       .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, 2 * e + n1 * e, 2 * e + l * e + n2 * e
       .AddNodes msoSegmentLine, msoEditingAuto, 2 * e + 3 * l * e, 2 * e + l * e + Dz * e
       .ConvertToShape.Select
   End With
   Selection.ShapeRange.Line.Weight = 0.25


    'Linea de las bases inferiores
   ActiveDocument.Shapes.AddLine(2 * e, 2 * e + l * e, 2 * e + 4 * l * e, 2 * e + l * e).Select
   Selection.ShapeRange.Line.Weight = 0.25

   'Aristas verticales
   ActiveDocument.Shapes.AddLine(2 * e, 2 * e + l * e, 2 * e, 2 * e + l * e + Az * e).Select
   Selection.ShapeRange.Line.Weight = 0.25

   ActiveDocument.Shapes.AddLine(2 * e + l * e, 2 * e + l * e, 2 * e + l * e, 2 * e + l * e + Bz * e).Select
   Selection.ShapeRange.Line.Weight = 0.25

   ActiveDocument.Shapes.AddLine(2 * e + 2 * l * e, 2 * e + l * e, 2 * e + 2 * l * e, 2 * e + l * e + Cz * e).Select
   Selection.ShapeRange.Line.Weight = 0.25

   ActiveDocument.Shapes.AddLine(2 * e + 3 * l * e, 2 * e + l * e, 2 * e + 3 * l * e, 2 * e + l * e + Dz * e).Select
   Selection.ShapeRange.Line.Weight = 0.25

   ActiveDocument.Shapes.AddLine(2 * e + 4 * l * e, 2 * e + l * e, 2 * e + 4 * l * e, 2 * e + l * e + Az * e).Select
   Selection.ShapeRange.Line.Weight = 0.25

   ' Next j
   ' Next i

End Sub
```

Son las fórmulas desarrolladas en esta sección

Si i = 6 y j = 4 el programa genera el siguiente desarrollo:



Modificando mínimamente el programa se pueden generar los desarrollos de todos los prismas escalados para que quepan en la siguiente página:


(10, 1)
(10, 10)
(1, 1)
(10, 1)

D CONCLUSIONES

Al desarrollar una idea geométrica hemos tenido que utilizar diferentes herramientas matemáticas que hemos estudiado durante estos últimos años: trigonometría, geometría del plano y del espacio, derivadas. Al ampliar proyecto y considerar otras disciplinas como la informática o la construcción efectiva de nuestras ideas hemos podido comprobar cómo las Matemáticas siguen siendo la base esencial de todos los razonamientos. La ingeniería, la arquitectura, el diseño gráfico y muchas otras disciplinas necesitan el lenguaje de las Matemáticas.

E BIBLIOGRAFÍA

[1] Matemáticas. M. J. Ruiz. J Llorente, C. González. Ed. Editex

[2] Matemáticas 1. Bachillerato. José María Arias Cabezas/Ildefonso Maza Sáez, Ed. Bruño

[3] Microsoft Excel. Functions & Formulas. Bernd Held. Wordware Publishing, Inc.

[4] Thomas´ Calculus Pearson- Addison-Wesley

[5] Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica L. A. Cordero, M. Fernández, A. Gray Ed. Addison-Wesley

F ANEXOS

Algunas de las versiones de nuestra superficie generadas con el programa desarrollado.