Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Octava Edición, 2013/2014

TRABAJO: ¿Sabía Mozart matemáticas?

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- Pablo Camarero Linares
- Elvira Martín Viscasillas
- Sara Mínguez Monedero

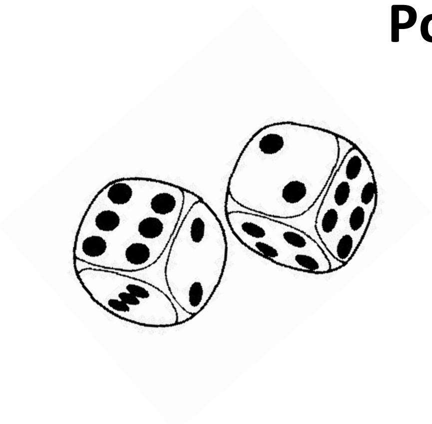
TUTORA:

- María Moreno Warleta

CENTRO: I.E.S. Alameda de Osuna (Madrid)

¿SABÍA MOZART MATEMÁTICAS?

Por Steinway y amigos



Contenido

Introducción

Las ideas expuestas en nuestro trabajo empezaron a desarrollarse en el mes de octubre. Todos los componentes de este grupo tocamos algún instrumento y, desde pequeños, nos han dicho que la música es buena para el desarrollo de habilidades, entre ellas las matemáticas, por lo que nos pareció interesante ver de qué forma están relacionadas las matemáticas con la música.

Este estudio también nos parece una buena forma de demostrar que las matemáticas no son solo cuentas, resolución de problemas y fórmulas imposibles de aprender, sino que también tienen aplicaciones muy atractivas y diferentes a lo convencional, como en este caso la música. Resulta sorprendente que algo tan amado y admirado a lo largo de la historia, como es la música, y algo tan incomprendido, como son las matemáticas, estén tan estrechamente unidas entre sí. De hecho, hay investigaciones que muestran que los circuitos cerebrales que utilizamos al hacer música son los mismos que utilizamos al pensar en matemáticas. Esto nos lleva a pensar que la relación existente entre ambas prácticas va mucho más allá de lo que podamos ver a simple vista.

Búsqueda del problema

Una vez que teníamos decidido que queríamos investigar sobre las relaciones entre música y matemáticas, debíamos encontrar un tema concreto en el que trabajar. La búsqueda no fue fácil.

Los primeros trabajos que estudiamos estaban relacionados con Pitágoras. Lo que más destacaba en sus ideas era descubrir los fundamentos de la música a partir de proporciones matemáticas. También nos fijamos en Ptolomeo, cuya idea consistía en que el universo está gobernado según proporciones numéricas armoniosas y que el movimiento de los cuerpos celestes se rige según proporciones musicales. Las teorías de Descartes también eran otra opción muy llamativa para nuestra investigación, al igual que las leyes de Mersenne y sus estudios sobre la vibración de las cuerdas, los trabajos relacionados con la razón áurea en la música, la vibración fundamental de Taylor, la vibración de las placas, membranas, varillas… recogidas en la ley de Hooke, la escala cromática en Euler, los ritmos euclídeos y la escala de Fibonacci entre otros. Pero entre estos trabajos, algunos no eran suficientemente matemáticos para nuestra investigación, otros requerían una formación musical que no tenemos y otros eran demasiado difíciles para nuestra comprensión.

Esta investigación previa nos resultó a ratos muy frustrante pues creíamos que no encontraríamos ningún tema sobre el que investigar. Pero también tuvo una parte muy interesante. Lo que más nos llamó la atención fue descubrir que incluso genios de la música, como lo son Haydn, Bartok, Bach, Beethoven y Mozart entre otros, aplicaran las matemáticas a sus obras, y que grandes científicos entre los que destacan matemáticos como Pitágoras, Fibonacci, Euler y Descartes, desarrollaran teorías aplicables a la música.

Finalmente, hacia mediados de diciembre, decidimos centrarnos en Mozart, ya que su trabajo de composición aleatoria nos pareció desde el principio uno de los más atractivos. El único problema es que no sabíamos si conseguiríamos hacer algo matemático con él pero había que intentarlo.

Tras decidir centrarnos en este peculiar juego, surgió la pregunta "¿Sabía Mozart matemáticas?"

Das Musikalisches Würfelspiel

Historia

A finales del siglo XVIII y principios del XIX se hicieron muy populares entre la nobleza de Europa Occidental varios pasatiempos musicales que consistían en componer obras sencillas destinadas a la danza, como valses y polonesas. Por ello se desarrollaron numerosos juegos con diferentes mecánicas para generar música aleatoria entre los cuales destacaron aquellos en los que se utilizaban dados.

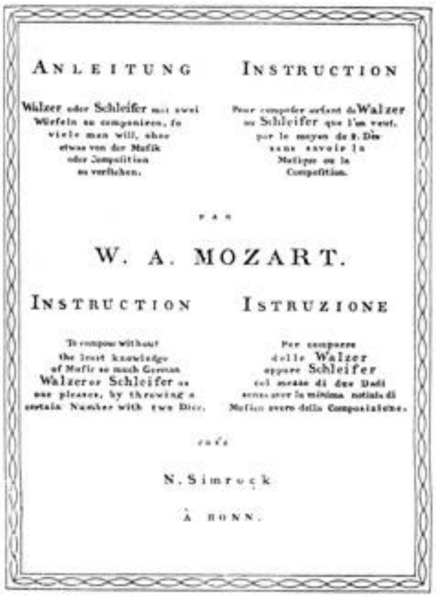
Fueron varios artistas los que desarrollaron este tipo de juegos, sin embargo el más conocido de todos fue el publicado por Nikolaus Simrock, el editor de Mozart.

Wolfang Amadeus Mozart era un gran aficionado a los juegos de azar y esto, junto a su pasión por la música, fue lo que le llevó a interesarse por estos pasatiempos.

Estos juegos tienen interés musical ya que están considerados propulsores de la música algorítmica.

Explicación

Para componer con *el juego de dados musical* de Mozart se utilizan dos dados y la obra resultante es un vals. Un vals está formado por un minueto y un trío.



En la obra de Mozart original aparecía un apartado dedicado a la explicación del juego en diferentes idiomas: alemán, italiano, francés e inglés, puesto que eran los idiomas más utilizados en esa época. En ella encontramos también las tablas necesarias para componer y las partituras de los diferentes compases.

La tabla del minueto por la que Mozart se regía tenía 11 filas, correspondientes a todas las posibles sumas al tirar dos dados, y 16 columnas que corresponden al número de compases que componen un minueto. A partir de estas tablas iremos escogiendo los compases.

MINUETO

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Se juega de la siguiente manera:

- Para cada uno de los 16 compases se tiran dos dados.
- Buscamos el resultado de sumar los dos dados en la columna izquierda.
- Una vez que sabemos la fila que debemos mirar, debemos hacerla coincidir con la columna del número de compás que estamos componiendo.

Ejemplo: Si estamos componiendo el primer compás y en nuestra tirada hemos obtenido suma 11 debemos fijarnos en la fila 11, columna 1. Por tanto, nuestro compás es el 3. De la misma forma, el segundo compás, si el valor obtenido en nuestra tirada es 3, al fijarnos en la segunda columna, nuestro compás sería el 6. El minueto lo obtendríamos repitiendo la tirada de dados hasta la columna 16.

Aquí tenemos un ejemplo completo:

COMPÁS	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
DADOS	11	3	7	5	9	10	10	8	7	7	7	6	7	7	4	8
MINUETO	**3**	**6**	**27**	**85**	**140**	**129**	**62**	**127**	**138**	**71**	**150**	**125**	**101**	**162**	**145**	**172**

Ahora basta buscar los compases 3, 6, 27, 85, etc en la partitura[1] y ya tenemos nuestro minueto:

El trío se obtiene de la misma manera pero tirando únicamente un dado y con otra tabla diferente que utiliza solamente los 96 primeros compases.

TRÍO

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
1	72	6	59	25	81	41	89	13	36	5	46	79	30	95	19	66
2	56	82	42	74	14	7	26	71	76	20	64	84	8	35	47	88
3	75	39	54	1	65	43	15	80	9	34	93	48	69	58	90	21
4	40	73	16	68	29	55	2	61	22	67	49	77	57	87	33	10
5	83	3	28	53	37	17	44	70	63	85	32	96	12	23	50	91
6	18	45	62	38	4	27	52	94	11	92	24	86	51	60	78	31

De esta forma, hay muchas combinaciones posibles. Para un minueto, aparentemente serían $11^{16} \approx 4,6 \times 10^{16}$, aunque no todos tienen la misma probabilidad. No obstante, con nuestra investigación hemos descubierto que no hay tantos minuetos como en un principio parecía.

[1] Todos los compases se encuentran en [10].

Planteamiento del problema

Objetivos

La finalidad inicial de nuestra investigación era comprender en qué modo afectaba la aleatoriedad al tirar los dos dados a la hora de componer el vals, calcular el número total de valses que se podían crear mediante este sistema y “descubrir el truco” que uso Mozart para conseguir que todos los minuetos sonaran bien.

Viendo los resultados que íbamos obteniendo nos preguntamos, ¿sabía Mozart matemáticas? ¿Era él consciente de las matemáticas que había en su composición o al pensar en música él aplicaba las matemáticas de forma inconsciente? Los problemas planteados en nuestro trabajo nos llevaron a intuir la respuesta a estas preguntas.

Además, una vez que comprendimos algunas de estas cosas, y animados por nuestros éxitos, decidimos crear nosotros mismos otras formas de componer en las que utilizábamos los mismos compases, pero generábamos minuetos con mayor libertad armónica.

Análisis de los compases

¿Por qué esa numeración?

Lo primero que hicimos fue mirar la tabla con los compases de los minuetos. ¿Había alguna lógica en todos esos números? ¿Por qué el primer compás que aparece en la tabla no tenía el número 1, el siguiente el 2, etc? Nuestro primer objetivo era descubrir en qué se basó Mozart para ordenarlos de dicha manera.

Lo primero que nos preguntamos era en qué orden los había compuesto. Teníamos cuatro posibilades: eran compases sacados de una obra ya compuesta, los había compuesto por filas, por columnas o no había seguido ningún orden lógico para componerlos.

Empezamos pensando que si los tocabamos en orden sonaría algo bonito pero sonaba fatal. Nuestra primera conjetura a la papelera.

Entonces nos fijamos en la tabla de los compases y los analizamos individualmente a ver si tenía algún tipo de sentido esa organización. Buscamos similitudes entre los compases próximos, pero no encontramos ninguna.

Continuamos sumando los números que había en las filas y las columnas para ver si había alguna pauta. Nada.

Tras esto, decidimos meter los números de cada fila y de cada columna en la página web *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* [11] para ver si alguno de ellos formaba una sucesión famosa. Era poco probable pero había que intentarlo.

A nuestro pesar, su única respuesta era siempre la siguiente:

“Sorry, but the terms do not match anything in the table”.

Después de todo esto llegamos a la conclusión de que, independientemente del orden en que los compuso, Mozart debió numerar los compases sin ningún sentido para darle al juego un mayor aspecto de aleatoriedad.

Estudio sistemático de los compases

Claramente debíamos seguir otros caminos. Para empezar, debíamos comprender lo que teníamos frente a nosotros.

Lo primero era analizar musicalmente y de forma sistemática todos los compases. Así que nos pusimos manos a la obra a completar la siguiente tabla[2]:

[2] La tabla completa puede verse en el ANEXO 1.

Compás	Col M	Prob M*36	Col T	Grado1	Grado2	Inv1	Inv2	Ton	CLASE	Tipo(*)
1	15	5	4	4	5	0	0	Do M	A	3
2	6	4	7	1		1	0	Sol M	A	2
3	1	2	2	1		0	0	Do M	B	1
4	10	2	5	1		0	0	Sol M	A	2
5	8	36	10	1		0	0	Sol M	C	2
6	2	2	2	1		0	0	Do M	D	1
7	11	4	6	4		0	0	Sol M	A	1
8	16	34	13	1		0	0	Do M	E	1
9	12	1	9	1		0	0	Sol M	A	2
10	3	1	16	5		0	0	Do M	A	2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Para cada compás miramos:

- en qué columna estaba dentro del minueto (es decir, que posición ocupa el compás dentro de la composición)
- cuál era su probabilidad de salir dentro del minueto
- en qué columna estaba dentro del trío (siempre con probabilidad 1/6)
- su tonalidad y
- su grado.

Además, estudiamos las inversiones, aunque no hemos sacado ninguna conclusión de ellas.

Análisis musical de la obra

Lo primero que observamos es que en cada una de las columnas todos los compases tenían la misma tonalidad y grado. Empezábamos a tener algunas pistas de por qué sonaban bien.

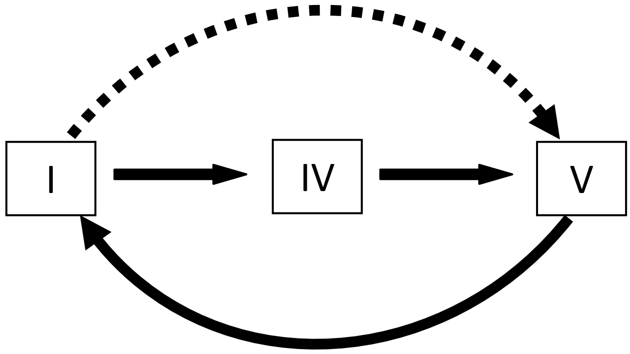
En esta tabla recogemos los resultados de dicho análisis:

Compás	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Tonalidad	D	D	D	D	S	S	S	S	S	S	S	S	D	D	D	D
Grado	I	I	V	I	V	I	IV	I	V	I	IV	I	I	I	IV	I

D = Do Mayor   S = Sol Mayor

La tabla muestra que la obra sigue el sistema armónico básico (SAB), es decir, está bien construida para que los compases encajen fácilmente. El SAB establece el orden que deben seguir los grados para que la obra tenga sentido musical.

En el caso de nuestra obra, usa un sistema de composición bastante sencillo en el que sigue los grados I, IV y V del siguiente modo:



Así pues, dentro de una misma tonalidad, de grado I se puede pasar a grado IV y después a grado V o pasar directamente a grado V. De grado V debe ir a grado I. Esto se cumple siempre salvo en los dos primeros compases en los que el primer grado de Do Mayor se extiende para introducirnos más en la tonalidad.

Además, Mozart cambia la tonalidad en función del compás en el que nos encontremos para darle un mayor interés musical. Para realizar un cambio de tonalidad se pueden sustituir Do Mayor I por Sol Mayor IV y viceversa o Do Mayor V por Sol Mayor I y viceversa.

Analizando algo más cuidadosamente observamos que el orden que sigue la composición de Mozart es el siguiente:

Compás	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Grados	Do M-I	Do M-I	Do M-V	Do M-I	Sol M-V_{+4}	Sol M-I_6	Sol M-IV-V	Sol M-I
Compás	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Grados	Sol M-V_{+4}	Sol M-I_6	Sol M-IV	Sol M-I	Do M-I	Do M-I	Do M-IV_6	Do M-I

En algunos compases utiliza inversiones, que le dan un poco más de color a la obra sin llegar a influir demasiado en ella. Estas inversiones están cifradas, dependiendo del tipo con un $_6$ si es primera inversión y con un $_{+4}$ si es tercera. Pero, como ya hemos dicho, en nuestro análisis de la obra no las hemos tenido muy en cuenta ya que casi no la modifican y además no tienen importancia en nuestro estudio matemático.

De todo este estudio concluimos que Mozart, que era un gran músico, no había dejado la estructura de la obra al azar pero esto era de esperar y, además, aún nos resultaba sorprendente que sonara bien para cualquier lanzamiento de dados. Había que seguir investigando.

Compases repetidos

Observamos que había compases repetidos y aquí la cosa se puso más interesante. A los compases iguales les asignamos un color y después los clasificamos por clases:

La clase A está compuesta por los compases que aparecen una única vez. Hay 117.

La clase B por todos los que son iguales al compás 3. Hay cuatro (3, 59, 87 y 144).

La clase C por los que son iguales al compás 5. En total hay once (5, 24, 30, 33, 81, 91, 94, 100, 107, 123 y 127). Aquí encontramos la primera curiosidad: todos ellos están en la columna 8, es decir, el compás del medio es siempre el mismo.

Y así seguimos. En total hay 13 clases, de la A a la M lo que suponen 117 + 12 = 129 compases distintos y no 16 x 11 = 176 como pensamos al principio. Aun así, son muchos.

También nos llamó la atención que el último compás, el compás 16, era siempre de la clase E salvo en un caso, el compás 78 que pertenece a la clase A, pero este compás aparece solo si la suma de los dados es 11, es decir, tiene una probabilidad de 1/18 (bastante baja).

Parece que Mozart jugaba con dados cargados. Haciendo que el compás 8 siempre fuera el mismo y que el compás 16 fuera casi siempre el mismo se garantizaba dos cosas:

- La obra no era “tan” aleatoria. Los siete primeros compases sí lo eran pero sabía que siempre terminaban en el mismo compás, marcando así una cadencia. Después venían otros siete compases aleatorios. Musicalmente hablando, esta composición es más fácil de controlar que una con 16 compases aleatorios seguidos.
- Los minuetos (casi) siempre acaban con el mismo compás, para marcar su final.

Continuando con nuestra investigación vimos dónde estaban estos compases repetidos y qué probabilidad tenía cada uno.

Curiosamente, todos los compases repetidos están en las mismas columnas: la 1, 2, 13 y 14 (bueno, y la 8 y 16 pero de estas, que son muy especiales ya hemos hablado) y todos ellos tienen la misma tonalidad y el mismo grado. Por si esto fuera poco, a compases iguales les asigna la misma probabilidad. Por ejemplo, todos los compases de la clase B tienen probabilidad 1/18 en cada una de las columnas en las que aparece, ¿casualidad? Nosotros no lo creemos.

Suponiendo que era intencional que compases iguales tuvieran la misma probabilidad, ¿tendrían todos asignada la misma suma de los dados o las sumas serían distintas? Si la asignación de probabilidad fuera intencional pero la suma fuera distinta, eso significaría que Mozart sabía matemáticas.

Vamos con ello: en el caso de los B todos ellos corresponden a suma 11 (no hay ninguno de suma 3). ¿Y los otros? El D tampoco, todos ellos se corresponden a suma 3 y los del F a suma 12. Malas noticias. Fuimos mirando todos los compases con sus respectivas sumas y las sumas eran siempre iguales. Observamos que ninguno de los compases repetidos aparecen en la fila de suma 8 y que cada clase tiene una suma distinta.

Compás		Posición en el minuto																Suma
Clase	Cantidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
A	117	3	1	11	11	11	11	11		11	11	11	11	1	1	11	1	
B	4	1	1											1	1			11
C	11								11									
D	4	1	1											1	1			3
E	10																10	
F	4	1	1											1	1			12
G	3		1											1	1			5
H	4	1	1											1	1			2
I	4	1	1											1	1			10
J	3		1											1	1			9
K	4	1	1											1	1			4
L	4	1	1											1	1			6
M	4	1	1											1	1			7

Colores según la probabilidad (·36):	1	2	3	4	5	6

De este estudio sacamos dos conclusiones. La primera era que parecía que Mozart había compuesto once minuetos distintos, pero con una estructura muy similar, que están ordenados por filas. La razón por la que pensamos esto es que esa repetición en los compases 1, 2, 13 y 14 en cada fila se justifica desde el punto de vista musical porque le da estructura a la obra, ya que se repite el modelo del principio. Pensamos que podría haber ordenado los minuetos de forma que los que mejor sonaban estuvieran en las filas de sumas más probables pero, como esto depende de cuestiones estéticas, no pudimos concluir nada a este respecto. De todas formas, al quedar los compases mezclados en la composición aleatoria, no tenemos claro que una ordenación de este tipo hubiera resultado significativa en la composición final.

La segunda conclusión es que el número de composiciones no es 11^{16} como creíamos en un principio. Considerando las repeticiones, vemos que el número de composiciones diferentes es $2x11^{14}$, que siguen siendo muchas. Si tenemos en cuenta que para la ejecución de un minueto son necesarios unos 30 segundos, el tiempo que necesitaríamos para tocarlos todos sería 11^{14} minutos que, realizando una sencilla cuenta:

$$\frac{11^{14}}{60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 100}$$

nos da la friolera de 72 250 729,4 siglos. ¡Qué importa que sean unos cuantos menos!

Búsqueda de regularidades

Mirando la forma en que se distribuían los compases observamos dos regularidades importantes.

Repetición: Las tonalidades y los grados del bloque central se repiten en dos grupos de cuatro compases.

Los compases 5, 6, 7 y 8 y los 9, 10, 11 y 12 siguen la misma pauta:

Sol Mayor V – Sol Mayor I – Sol Mayor IV – Sol Mayor I

Compás	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Tonalidad	D	D	D	D	S	S	S	S	S	S	S	S	D	D	D	D
Grado	I	I	V	I	V	I	IV	I	V	I	IV	I	I	I	IV	I

D = Do Mayor S = Sol Mayor

Simetría: Ocurre en las columnas 6 a 12 con la columna 9 como eje de simetría: 8 y 10 son Sol Mayor I, 7 y 11 Sol Mayor IV y 6 y 12 Sol Mayor I.

Compás	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Tonalidad	D	D	D	D	S	S	S	S	S	S	S	S	D	D	D	D
Grado	I	I	V	I	V	I	IV	I	V	I	IV	I	I	I	IV	I

D = Do Mayor S = Sol Mayor

Pensamos que Mozart utilizó estas dos regularidades para mantener con seguridad la estructura musical a pesar de la aleatoriedad.

Distintas composiciones

Tras haber comprendido la estructura del minueto de Mozart, y para introducir una parte más creativa a nuestro estudio, nos propusimos generalizar la idea de Mozart y componer algunos minuetos con diferentes restricciones. Para ello aprovechamos las posibilidades que nos dan las nuevas tecnologías de elegir números aleatorios dentro de cualquier rango.

Composición clásica

Comenzamos por lo más sencillo. Decidimos utilizar los mismos compases creados por Mozart pero, en lugar de restringirnos a los once compases de primer grado de Do que aparecen en la primera columna, ampliar la gama de compases a todos los de primer grado de Do que compuso Mozart. Teníamos así 29 posibilidades para el primer compás. Y lo mismo hicimos en las otras columnas. Podíamos elegir cualquier compás siempre que tuviera la misma tonalidad y grado que los elegidos por Mozart.

De esta forma, siguiendo la estructura de la *composición clásica* de Mozart:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D-I	D-I	D-V	D-I	S-V	S-I	S-IV	S-I	S-V	S-I	S-IV	S-I	D-I	D-I	D-IV	D-I

ahora elegíamos el primer compás de entre los 29 compases Do Mayor I diferentes creados por él y no solo de entre los 11 que aparecen en la primera columna de su tabla. Cada compás Do Mayor I del segundo compás entre los 29 existentes, etc.

Tocamos algunas de estas composiciones y vimos que no sonaban mal así que nos animamos y dimos mayor libertad aún.

Composición libre

Para continuar nuestra labor creativa creamos una tabla en la que clasificamos los compases por grados equivalentes en las diferentes tonalidades.

- El tipo 1 corresponde al primer grado de Do Mayor y al cuarto de Sol Mayor.
- El tipo 2 corresponde al quinto grado de Do Mayor y al primero de Sol Mayor.
- El tipo 3 corresponde al cuarto grado de Do Mayor, que no es igual a ningún grado de Sol Mayor.
- El tipo 4 corresponde al quinto grado de Sol Mayor, que tampoco corresponde a ningún grado de Do Mayor.

El número de compases de cada tipo es:

TIPO 1		TIPO 2		TIPO 3	TIPO 4
Do-I	Sol-IV	Do-V	Sol-I	Do-IV	Sol-V
29	22	11	34	11	22
51		45		11	22

Siguiendo esta estructura clásica pero utilizando nuestra propia tabla de tipos creamos una composición libre del siguiente modo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
DI	T1	T2	T1	T4	T2	T1	T2	T4	T2	T1	T2	T1	T1	T3	DI

El primero y último compás debían ser Do Mayor I pero el segundo podía ser tanto Do Mayor I como Sol Mayor IV, el tercero podía ser Do Mayor V o Sol Mayor I, etc.

De nuevo probamos y vimos que seguían sonando bien. Calculamos el número total de composiciones de este tipo, y pudimos observar que al poner menos restricciones que en la composición clásica, el número aumentaba considerablemente. El número total de composiciones es $29^2 \cdot 51^6 \cdot 45^5 \cdot 22^2 \cdot 11 \approx 10^{25}$, ¡muchas más que el número de estrellas que se estima hay en el Universo[3]!

Después de esto, con ayuda del Excel, creamos un programa que nos componía de forma aleatoria con nuestras nuevas condiciones. Para ello creamos una tabla dividida en compases, “dados” y minueto. El número de compases es siempre igual a 16, que son los que corresponden a un minueto. La parte que varía son los dados, y por lo tanto también el minueto resultante. Para generar números aleatorios en el rango correspondiente utilizamos la función: =ALEATORIO.ENTRE(;). El rango varía en función del compás en el que estemos y, a diferencia de lo que ocurre con los dados de Mozart, cada número tienen la misma probabilidad de salir.

Compás	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Tipo	DI	T1	T2	T1	T4	T2	T1	T2	T4	T2	T1	T2	T1	T1	T3	DI
Aleatorio entre	1;29	1;51	1;45	1;51	1;22	1;45	1;51	1;45	1;22	1;45	1;51	1;45	1;51	1;51	1;11	1;29

Una vez teníamos el número aleatorio, teníamos que buscar el compás correspondiente para poder crear el minueto. Para ello usamos la función: BUSCARV (B$4;'Compases por tipo'!$A$3:$F$53;6). Esto es en el primer compás pero en cada compás varia. La B varía en función del número del compás. La última letra es la Q que corresponde al compás 16. Siempre busca en la hoja de “compases por tipo” del A3 al F53 que es donde tenemos la tabla con los diferentes compases. Lo que varía es en la columna que tiene que buscar, dependiendo del tipo de compás que sea.

Una vez creados estos minuetos y la forma de generarlos aleatoriamente con ayuda de Excel, decidimos poner algunas restricciones a la composición libre para darle mayor musicalidad a la obra obtenida y respetar así las regularidades impuestas por Mozart.

[3] Se estima que el número de estrellas del Universo es de 300 000 trillones = $3x10^{23}$.

Composición libre con simetría y con repetición

La idea ahora era crear obras con la misma libertad en los primeros compases pero respetando la simetría de tonalidad y grado en los tres compases a izquierda y derecha del compás número 9 o la repetición de tonalidad y grado en los compases centrales. Es decir, para crear una composición simétrica, el compás 6 puede ser del tipo 2 pero, una vez elegido ese compás, si resultaba ser Do Mayor V, el compás 12, que es su simétrico, debería ser también Do Mayor V y no cualquiera del tipo 2.

Después creamos unos programas similares al anterior, pero en estos casos más complejos, para generar de manera aleatoria estas obras.

En el caso de la simetría, la complejidad se debe a que ahora, dependiendo del resultado en los dados de los compases 6, 7 y 8, los compases 10, 11 y 12 deberán ser del mismo grado a su compás simétrico correspondiente. Por ello los 9 primeros compases y los 4 últimos en los "dados" son iguales a la tabla superior, es decir:

Compás	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**13**	**14**	**15**	**16**
Tipo	D1	T1	T2	T1	S5	T2	T1	T2	S5	T1	T1	D4	D1
Aleatorio entre	1;29	1;51	1;45	1;51	1;22	1;45	1;51	1;45	1;22	1;51	1;51	1;11	1;29

Sin embargo en los compases 10, 11 y 12 había que meter una condición en la función:

10: =SI(I4<12;ALEATORIO.ENTRE(1;11);ALEATORIO.ENTRE(12;45))

11: =SI(H4<30;ALEATORIO.ENTRE(1;29);ALEATORIO.ENTRE(30;51))

12: =SI(G4<12;ALEATORIO.ENTRE(1;11);ALEATORIO.ENTRE(12;45))

A la hora de buscar los compases dependiendo del resultado de los dados sigue siendo igual que en el caso anterior.

En la repetición debíamos tener en cuenta que lo que saliese en unos compases condicionaría otros, pero en este caso los compases son otros. Aquí los compases 6, 7 y 8, condicionan a los compases 10, 11 y 12 (los compases 5 y 9 no tienen ningún condicionante ya que en el tipo IV solo hay un grado posible). Por ello los 9 primeros compases y los 4 últimos en los dados son iguales a la tabla superior, es decir:

Compás	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**13**	**14**	**15**	**16**
Tipo	D1	T1	T2	T1	S5	T2	T1	T2	S5	T1	T1	D4	D1
Aleatorio entre	1;29	1;51	1;45	1;51	1;22	1;45	1;51	1;45	1;22	1;51	1;51	1;11	1;29

y los tres restantes se eligen así:

10: =SI(G4<12;ALEATORIO.ENTRE(1;11);ALEATORIO.ENTRE(12;45))

11: =SI(H4<30;ALEATORIO.ENTRE(1;29);ALEATORIO.ENTRE(30;51))

12: =SI(I4<12;ALEATORIO.ENTRE(1;11);ALEATORIO.ENTRE(12;45))

Haciendo un diagrama de árbol, calculamos cuántas composiciones diferentes podíamos obtener con estás restricciones. Observamos que, aproximadamente, una de cada tres composiciones clásica respetaba alguna de las restricciones.

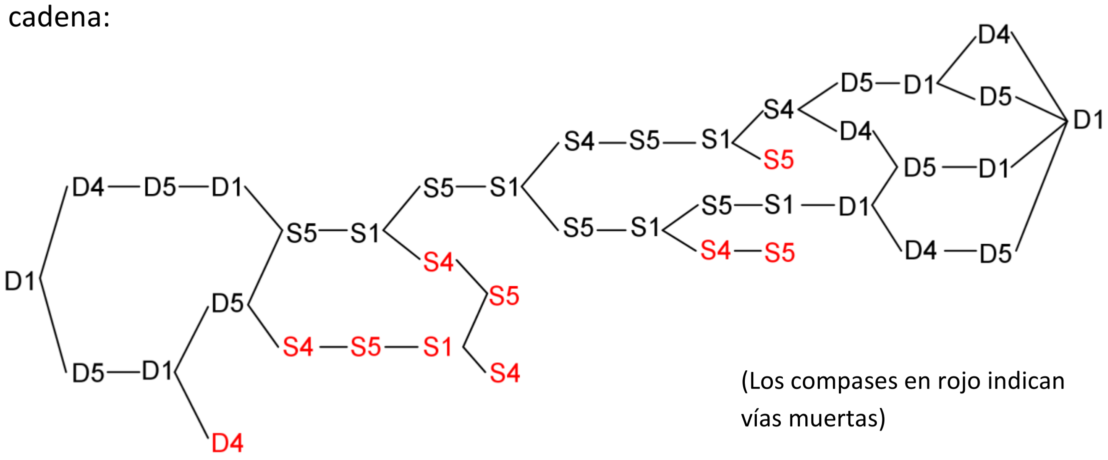
<u>Cálculo del número de composiciones libres con simetría o repetición</u>

El número es igual en cualquiera de los dos casos pues los compases afectados por las restricciones, aunque en diferente orden, son los mismos.

$29^2 \cdot 51^4 \cdot 45 \cdot 22^2 \cdot 11 \cdot (11^4 \cdot 29^2 + 11^2 \cdot 29^2 \cdot 34^2 + 11^4 \cdot 22^2 + 11^2 \cdot 22^2 \cdot 34^2 + 34^2 \cdot 29^2 \cdot 11^2 + 34^4 \cdot 29^2 + 34^2 \cdot 22^2 \cdot 11^2 + 34^4 \cdot 22^2) \approx 3x10^{24}$.

Composición Steinway

Podíamos haber creado una composición libre que respetara tanto la simetría como la repetición, pero esto ya nos pareció que no entrañaba ninguna dificultad así que decidimos darle un toque más personal a las creaciones e inventamos la composición Steinway. En nuestra composición utilizamos un sistema bastante diferente al de Mozart. Empezando en el primer grado de Do (Do-I), hicimos una cadena siguiendo las diferentes posibilidades que se pueden dar a un compás dependiendo del grado del anterior, siguiendo el SAB explicado anteriormente. El resultado, fue la siguiente cadena:



(Los compases en rojo indican vías muertas)

Decidimos que el compás 8 debía ser Sol-I, para respetar la cadencia a la mitad de la obra, así tuvimos que descartar algunos caminos, marcados en rojo, que nos llevaban a otro grado en ese compás. Hicimos lo mismo a medida que llegábamos al final de la obra, que debe acabar en Do-I. También, al modular de una tonalidad a otra se debe respetar que en el compás en el que se tiene lugar la modulación, el grado sea común a las dos tonalidades. Es decir: un I grado de Do Mayor (Do-I) es equivalente a un IV en

Sol Mayor (Sol-IV). Por lo tanto Do-I podemos ponerlo en el compás en el que pasamos de Do Mayor a Sol Mayor. Sin embargo, el IV grado de Do Mayor (Do-IV) no es equivalente a ningún grado de Sol, por lo que queda descartado.

Esta fue una composición mucho más creativa y un poco más complicada que las anteriores a la hora de pensarla y de llevarla a cabo con Excel.

Tras desarrollar los caminos, esto es lo que hicimos en la tabla Excel en los compases que dependían de los anteriores:

3: =SI(C4<12;ALEATORIO.ENTRE(30;40);ALEATORIO.ENTRE(1;29))

4: =SI(D4<30;ALEATORIO.ENTRE(30;40);ALEATORIO.ENTRE(1;29))

10: =SI(J4<23;ALEATORIO.ENTRE(35;56);ALEATORIO.ENTRE(1;34))

11: =SI(K4<35;ALEATORIO.ENTRE(35;56);ALEATORIO.ENTRE(1;34))

12: =SI(L4<35;ALEATORIO.ENTRE(1;22);ALEATORIO.ENTRE(23;56))

13: =SI(M4<23;ALEATORIO.ENTRE(30;51);ALEATORIO.ENTRE(1;29))

Aquí el camino se dividía en tres opciones por lo que la fórmula se complica.

14: =SI(N4<30;ALEATORIO.ENTRE(30;51);SI(N4<41;ALEATORIO.ENTRE(41;50);

ALEATORIO.ENTRE(1;29)))

15: =SI(O4<30;ALEATORIO.ENTRE(30;51);SI(O4<41;ALEATORIO.ENTRE(41;50);

ALEATORIO.ENTRE(1;29)))

La grabación de las obras

Una vez que habíamos desarrollado todas nuestras composiciones, decidimos tocarlas. Para ello grabamos uno a uno los compases para después poderlos unir según la diferente composición que resultara. Sin embargo, al grabar por separado los compases se perdía la continuidad de la pieza por lo que no obtuvimos el resultado esperado, aunque sí conseguíamos hacernos una ligera idea de cómo sería la pieza.

Finalmente decidimos tocar un ejemplo (absolutamente aleatorio) de cada composición para que el lector pueda hacerse una idea de cómo suenan.

Las composiciones que interpretamos fueron:

COMPOSICIÓN ALEATORIA CLÁSICA

COMPÁS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nº Aleatorio	22	2	3	14	16	6	3	8	3	21	18	24	12	23	10	15
MINUETO	**85**	**6**	**42**	**51**	**135**	**29**	**15**	**37**	**28**	**97**	**134**	**125**	**45**	**101**	**149**	**53**
Grados	DI	DI	DV	DI	SV	SI	SIV	SI	SV	SI	SIV	SI	DI	DI	DIV	DI

COMPOSICIÓN LIBRE

COMPÁS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nº Aleatorio	11	4	10	38	11	8	49	28	20	6	40	4	10	48	1	15
MINUETO	**43**	**12**	**165**	**48**	**99**	**158**	**150**	**82**	**153**	**128**	**62**	**113**	**41**	**147**	**1**	**53**
Grados	DI	DI	DV	SIV	SV	DV	SIV	SI	SV	DV	SIV	DV	DI	SIV	DIV	DI

COMPOSICIÓN SIMÉTRICA

COMPÁS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nº Aleatorio	16	21	9	3	12	44	35	39	23	3	42	12	50	17	2	14
MINUETO	**58**	**78**	**163**	**8**	**102**	**175**	**26**	**139**	**55**	**42**	**106**	**2**	**159**	**60**	**23**	**51**
Grados	DI	DI	DV	DI	SV	SI	SIV	SI	SV	SI	SIV	SI	SIV	DI	DIV	DI

COMPOSICIÓN CON REPETICIÓN

COMPÁS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nº Aleatorio	15	31	8	6	18	16	32	40	17	27	49	41	38	46	11	28
MINUETO	**53**	**11**	**158**	**17**	**140**	**20**	**15**	**143**	**138**	**77**	**150**	**155**	**48**	**126**	**173**	**167**
Grados	DI	SIV	DV	DI	SV	SI	SIV	SI	SV	SI	SIV	SI	SIV	SIV	DIV	DI

COMPOSICIÓN STEINWAY

COMPÁS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nº Aleatorio	16	3	36	4	9	32	1	28	18	54	22	14	37	43	2	14
MINUETO	**58**	**44**	**141**	**12**	**80**	**166**	**16**	**139**	**134**	**153**	**121**	**108**	**116**	**42**	**6**	**51**
Grados	DI	DIV	DV	DI	SV	SI	SV	SI	SIV	SV	SI	SIV	DIV	DV	DI	DI

El resultado fue bastante bueno, aunque en muchos casos el último compás no da sensación de final por lo que, tal vez, sería conveniente hacer como Mozart y ser más restrictivos en ese compás. Pueden escucharse estas obras en el ANEXO 2.

Como hemos dicho anteriormente, esta no es una obra muy compleja, por lo que no podemos esperar una maravilla musical pero, sin embargo, sí que hemos podido comprobar que aplicando matemáticas a los compases compuestos por Mozart y a la forma de colocarlos para componer, se obtienen buenos resultados.

Conclusión

Aunque nos gusta pensar que sí, este estudio no demuestra que Mozart supiera matemáticas. Sin embargo, en su obra hemos podido observar que están muy presentes debido a que la música y las matemáticas están estrechamente unidas. Por lo tanto, Mozart aplicaba las matemáticas al menos de forma inconsciente.

A pesar de que no hemos podido responder a la pregunta que nos planteábamos, hemos descubierto que cuando miras las cosas desde un punto de vista matemático, descubres propiedades y estructuras que no se ven a simple vista.

El método que hemos seguido en nuestro trabajo ha sido:

1º Hacer un estudio sistemático del problema.

2º Buscar regularidades.

3º Generalizar.

Hemos aprendido que este método, muy matemático, puede ser muy útil en diversas situaciones de la vida, por lo que a pesar de que no hemos concluido nada, el trabajo ha merecido la pena.

También hemos aprendido a utilizar Excel con mayor soltura, y, por último, hemos compuesto unos diez cuatrillones de canciones diferentes, aunque es muy poco probable que alguna de ellas consiga ser la canción del verano.

Bibliografía

Los dados de Mozart

[1] http://www.dpye.iimas.unam.mx/federico/mozart/

[2] http://es.wikipedia.org/wiki/Musikalisches_W%C3%BCrfelspiel

[3] http://ommalaga.com/Gabiralia/GabiCSMM/ANA/El_sigilo_aleatorio_en_Mozart.pdf

Música y matemáticas

[4] http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%BAsica_y_matem%C3%A1ticas

[5] http://es.wikipedia.org/wiki/Armon%C3%ADa_de_las_esferas

[6] http://es.wikipedia.org/wiki/Martillos_de_Pit%C3%A1goras

[7] http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Musica%20y%20Matematicas.pdf

Composición

[8] http://www.pianonoise.com/Article.dice.htm

[9] http://sunsite.univie.ac.at/Mozart/dice/

Partitura

[10] http://imslp.org/wiki/Musikalisches_W%C3%BCrfelspiel,_K.516f_(Mozart,_Wolfgang_Amadeus)

Otros

[11] http://oeis.org