Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Octava Edición, 2013/2014

TRABAJO: Platón y Arquímedes en la conquista del espacio

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE BACHILLERATO

AUTORES:

- Ingo Efler Herranz
- Diego Efler Herranz

TUTORA:

- Isabel Benito Miguel

CENTRO: I.E.S. San Juan Bautista (Madrid)

PLATÓN Y ARQUÍMEDES EN LA CONQUISTA DEL ESPACIO

Índice del Trabajo

1. Introducción: objetivos y antecedentes....2
2. Resultados del trabajo....4
   - 2.1 Redes construidas mediante centros de simetría en los vértices....4
   - 2.2 Redes de poliedros con una cara en común....6
3. Conclusiones....17
4. Bibliografía....18
5. Anexos....18

Equipo: geometras_alejandrinos

1)INTRODUCCIÓN : OBJETIVOS Y ANTECEDENTES DEL TRABAJO

Dentro del infinito grupo de poliedros que existen, hay un conjunto reducido de poliedros que cuentan con una belleza y una regularidad que los distingue del resto: hablamos de los sólidos platónicos y de los sólidos arquimedianos.

Los sólidos platónicos son cuerpos poliédricos que se caracterizan principalmente por 1)Tener todas sus caras regulares y 2) Ser todas las caras iguales. Partiendo de esto, se deduce que son inscriptibles y circunscriptibles a una esfera. También se puede deducir que los sólidos platónicos deben tener por caras triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos (tal y como demuestra Euclides en el Libro XIII de " Los Elementos").

Por su parte, los sólidos arquimedianos cumplen también con que todas sus caras son regulares. Sin embargo, no constan únicamente de un solo tipo de cara, y así pueden combinar cuadrados con triángulos equiláteros, pentágonos con hexágonos,... Sin embargo deben cumplir que cada vértice se compone del mismo tipo de caras y en igual número.

En un plano secundario, no habría que olvidarse de los sólidos de Catalán, que son los poliedros duales de los sólidos arquimedianos (se obtienen al unir los centros de las caras de cada sólido arquimediano), o los sólidos de Johnson, que deben cumplir con las mismas condiciones que los arquimedianos salvando la uniformidad de los vértices (en estos sí se permite una variedad de vértices). Los deltaedros son poliedros que se constituyen exclusivamente de triángulos equiláteros.

El objetivo principal de nuestro proyecto es muy simple: consiste en la construcción de redes infinitas, uniformes y definibles formadas a partir de cada uno de los sólidos platónicos y arquimedianos tal que se extiendan por todo el espacio tridimensional, de ahí el título del trabajo *"Platón y Arquímedes en la conquista del espacio"*. Con "red" entenderemos una estructura formada a partir de poliedros unidos de alguna forma en concreto. Con "definible" nos referimos a que sus vértices puedan ser localizados en el espacio mediante unos vértices iniciales y unos vectores de traslación. Estas redes

1)Constarán del mismo tipo de sólido, y solo de este.
2)Se constituirán de distintas formas: o bien compartiendo dos de estos poliedros un mismo vértice, teniendo ambos una simetría central respecto a este punto; o bien compartiendo dos de estos sólidos una cara.

En el desarrollo de este trabajo, los programas de software juegan un papel esencial. La representación de las redes de poliedros fue posible gracias al programa Google SketchUp; muchos cálculos fueron facilitados por Microsoft Mathematics e incluso las hojas de cálculo de Excel. Por otro lado sin las fuentes consultadas (que están en el apartado de Bibliografía), este trabajo hubiera resultado imposible.

¿Pero por qué este trabajo?¿Existe algún tipo de precedente histórico? El estudio de los sólidos platónicos se remonta a civilizaciones verdaderamente antiguas. Se han hallado reconstrucciones de estos sólidos de aproximadamente el año 2000 a.C. en un yacimiento arqueológico de Escocia, si bien su finalidad pudiera ser meramente decorativa o de entretenimiento.

Sin embargo, fueron diversos pensadores griegos quienes realmente admiraron la perfección de estos sólidos, a nivel estético y matemático. Personajes tan emblemáticos como Pitágoras de Samos, Teeteto e incluso el mismísimo Platón (de quien tomaron el nombre) fueron quienes estudiaron y apreciaron la belleza de estos poliedros. A su vez Arquímedes investigó los poliedros que llevan su nombre.

Más tarde, en el Renacimiento, Johannes Kepler (1571-1630), admirador de estos poliedros, diseña un modelo astronómico basado en los sólidos platónicos. Pero también realiza una conjetura ligada al problema que se plantea en este trabajo: la conjetura de Kepler, que establece que el empaquetamiento más eficiente de esferas es el apilamiento piramidal de caras centradas

(apilamiento que encontraremos en el primer apartado de nuestro trabajo). Leonhard Euler (1707-1783) relaciona el número de caras, vértices y aristas, de la forma: C+V = A+2.

Sin embargo, un matemático que trata un aspecto realmente ligado a nuestro trabajo es Lord Kelvin (1824-1907), quien se plantea el problema de la eficiencia del espacio tridimensional y conjetura que el octaedro truncado es el más eficiente de todos (menor relación área-volumen), en la llamada Conjetura de Kelvin (veremos que este poliedro rellena el espacio sin huecos). En 1993 esta conjetura sería rebatida por Denis Weaire y Robert Phelan con un contraejemplo que interesa en nuestro trabajo: dodecaedros irregulares y tetradecaedros que comparten caras.

Y sin más preámbulos, presentaremos los resultados de nuestro trabajo, que gira en torno a los siguientes poliedros:

Poliedro	**Vértices**	**Caras**	**Aristas**
Cubo	8	6 cuadradas	12
Octaedro	6	8 triangulares	12
Tetraedro	4	4 triangulares	6
Icosaedro	12	20 triangulares	30
Dodecaedro	20	12 pentágonos	30
Tetraedro truncado	12	8 = 4 triangulares + 4 hexagonales	18
Cubo truncado	24	14 = 8 triangulares + 6 octogonales	36
Octaedro truncado	24	14 = 6 cuadrados + 8 hexagonales	36
Cuboctaedro	12	14 = 8 triangulares + 6 cuadradas	24
Rombicuboctaedro	24	26 = 8 triangulares + 18 cuadradas	48
Cuboctaedro truncado	48	26 = 12 cuadrados + 8 hexagonales + 6 octagonales	72
Icosidodecaedro	30	32 = 20 triangulares + 12 pentagonales	60
Icosidodecaedro truncado	120	62 = 30 cuadradas + 20 hexagonales + 12 decagonales	180
Icosaedro truncado	60	32 = 12 pentagonales + 20 hexagonales	90
Dodecaedro truncado	60	32 = 20 triangulares + 12 decagonales	90
Rombicosidodeca-edro	60	62 = 20 triangulares + 30 cuadradas + 12 pentagonales	120
Cubo romo	24	38 = 20 triangulares y 4 cuadradas	60
Dodecaedro romo	60	92 = 80 triangulares +12 pentagonales	150

2)RESULTADOS DEL TRABAJO

2.1)Redes construidas mediante centros de simetría en los vértices

Uno de los tipos de redes poliédricas que nos propusimos abordar a lo largo de este proyecto son aquellas que se construyen a partir de sólidos (platónicos y arquimedianos), que comparten un vértice y son simétricas respecto a este punto.

Pasamos a enumerar aquellas consideraciones que nos han sido útiles:
1)Se sitúan dos centros de simetría en el espacio A y A'. Al realizarse el simétrico de un objeto dado B respecto A, se obtiene el simétrico B'. A su vez, si se realiza un segundo simétrico de B' respecto a A ', se obtiene un tercer objeto, B'', que es una traslación del primer objeto B. Esto se puede demostrar:

B_n es un sólido que consta de los B_1 B_2 B_3 puntos , , , etc.

$$B_n \equiv \left[B_1(x_1, y_1, z_1), B_2(x_2, y_2, z_2), B_3(x_3, y_3, y_3), ..., B_i(x_i, y_i, z_i)\right]$$

Diremos que $B_n = (x_n, y_n, z_n)$
Los puntos de simetría A_1 y A_2 se definen por:
$A_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ y $A_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$
El cuerpo simétrico de B_n respecto a A_1 es B'_n. Las coordenadas de sus puntos son:

$$Si\ \overrightarrow{B_n A_1} = (X_1 - x_n, Y_1 - y_n, Z_1 - z_n)$$

$$B'_n = B_n + 2 \cdot \overrightarrow{B_n A_1} = (2X_1 - x_n, 2Y_1 - y_n, 2Z_1 - z_n)$$

El cuerpo simétrico de B'_n respecto a A_2 es B''_n. Las coordenadas de sus puntos son:

$$Si\ \overrightarrow{B'_n A_2} = (X_2 + x_n - 2X_1, Y_2 + y_n - 2Y_1, Z_2 + z_n - 2Z_1)$$

$$B''_n = B'_n + 2 \cdot \overrightarrow{B_n A_2} = (2X_2 + x_n - 2X_1, 2Y_2 + y_n - 2Y_1 - y_n, 2Z_n + z_n - 2Z_1)$$

Es incuestionable que tras estas simetrías los puntos se han desplazado pero, ¿lo han hecho todas siguiendo un mismo vector, como es de esperar de una traslación de un conjunto de puntos? Para verificarlo, se comprueba que $\overrightarrow{B_1 B_2} = \overrightarrow{B''_1 B''_2}$ .Tras la diferencia pertinente resulta que:

$$\overrightarrow{B_1 B_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

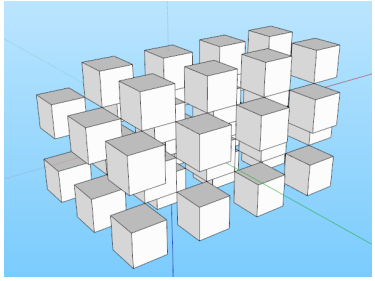
$$\overrightarrow{B''_1 B''_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Al mantenerse este vector entre puntos homólogos, se demuestra que el sólido ha sido trasladado al completo.

2)Habiendo demostrado que mediante dos simetrías centrales se obtiene una traslación completa de un sólido (o poliedro) cualquiera, solo falta la obtención de tres vectores independientes de traslación para poder construir una red de sólidos que abarque todo el espacio.

Procedemos con la exposición y la explicación de cada modelo de red:

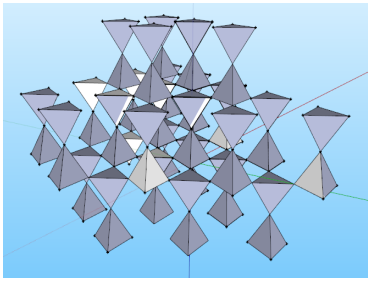
- **El Cubo**



A cada vértice le corresponde un centro de simetría, como se precia en la imagen.
Suponiendo que se parte de un cubo centrado en el origen, de arista 1: $C \equiv \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$

Se observa que la red resultante se definirá por:
$\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) + n_1(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ siendo n_1 un número entero cualquiera.

● El Tetraedro regular



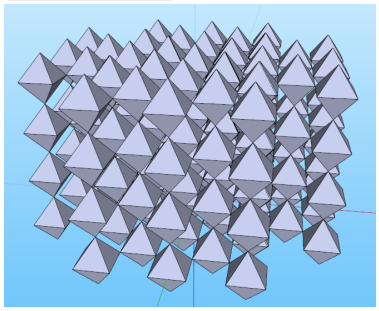
Se vuelve a situar un centro de simetría en cada vértice del tetraedro inicial, de arista 1. Pero esta vez no nos basta con definir un solo tetraedro; tendremos que definir dos tetraedros orientados de forma distinta (derecha).

$$T \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{-1}{2}, 0\right) & & \left(\frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{-1}{2}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \\ \left(\frac{2\sqrt{3}}{6}, 0, 0\right) & \left(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) & \left(\frac{2\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \\ \left(\frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, 0\right) & & \left(\frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \end{array} \right.$$

Se observa que la red viene definida de la siguiente forma:

$$T + n_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{6}, 1, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) + n_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{6}, -1, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) + n_3\left(\frac{-4\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \quad \text{Donde: } n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$$

● El Octaedro



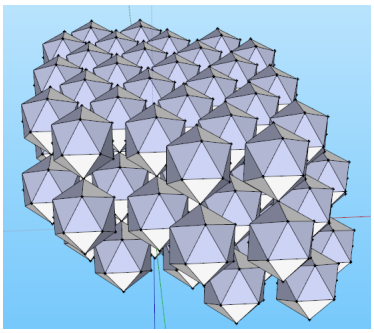
El octaedro es otro sólido platónico con el que se puede construir una red situando centros de simetría en todos sus vértices. Se parte otra vez de un octaedro inicial de lado 1:

$$O \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) & \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right) & \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right) & \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) & \left(0, 0, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \end{array} \right.$$

Esta red vendrá definida de la siguiente manera:

$$O + n_1(\pm 1, 1, 0) + 2n_2\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{Donde } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

● El Icosaedro



Sin embargo, la red compuesta por icosaedros acumula una serie de particularidades que pasamos a mencionar:
-No todos sus vértices pueden tener un centro de simetría; los icosaedros resultantes intersecarían.
-La distribución de icosaedros es la misma que en la conjetura de Kepler: sus esferas circunscritas están apiladas piramidalmente con las caras centradas.

Se tiene que definir un icosaedro inicial I:

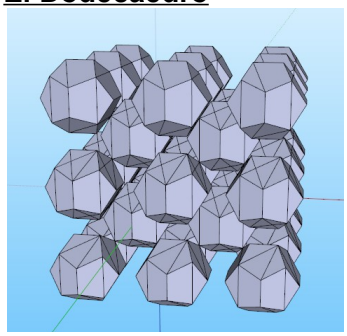
$$I \left\{ \begin{array}{c} \left(\pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}, 0, \pm\frac{1}{2}\right) \\ \left(0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) \\ \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}, 0\right) \end{array} \right.$$

Partiendo de este icosaedro de lado 1, pasamos a definir la red al completo:

$$I + n_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1, 0\right) + n_2\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, 1, 0\right) + n_3\left(1, 0, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + n_4\left(-1, 0, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

Donde: $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}$

● El Dodecaedro



El dodecaedro inicial, de arista 1, se sitúa en las coordenadas:

$$D \left\{ \begin{array}{c} \left(\pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}}, \pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}}, \pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right) \\ \left(\pm\frac{1}{2}, 0, \pm\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right) \\ \left(0, \pm\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}}, \pm\frac{1}{2}\right) \\ \left(\pm\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}}, \pm\frac{1}{2}, 0\right) \end{array} \right.$$

Se observa que esta red se define en el espacio de la siguiente forma:

$$D + n_1\left(\pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{3+\sqrt{5}}}, \pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{3+\sqrt{5}}}, \pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

Donde: $n_1 \in \mathbb{Z}$.

● **Sólidos arquimedianos**

Viendo esto, se decidió proceder a la construcción de redes también basadas en centros de simetría de cada uno de los sólidos arquimedianos, hallando un método de construcción que fuera válido para todos ellos.

Sabíamos que este método debía basarse en una serie de premisas:

-Necesidad de 3 vectores de traslación linealmente independientes. Solo 2 describirían un plano, no el espacio.

-Poliedros como los sólidos arquimedianos se caracterizan por una relativa abundancia de vértices, lo que facilita la elección de vértices donde situar centros de simetría.

-Los vértices seleccionados deben cumplir con que las simetrías resultantes no intersequen.

La solución a este problema es válido para todos los sólidos arquimedianos, incluyendo los romos.

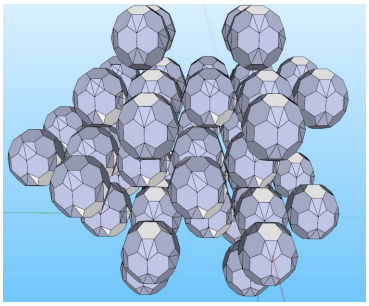
1)Se designan al menos 3 vértices donde situar los centros de simetría, teniendo en cuenta que los sólidos resultantes no deben intersecar.

2)Los sólidos obtenidos son o bien traslaciones del primero, o en el caso de los romos, son isomórficos uno respecto del otro. Estos sólidos y el anterior conformarán la estructura básica de la red.

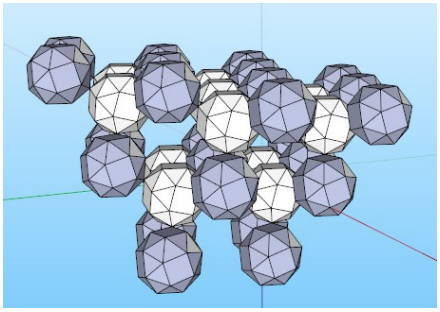
3)Trasladando esta estructura básica sucesivamente se obtiene la red pedida.

Presentamos algunos ejemplos:

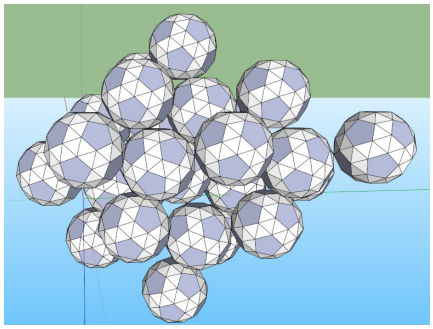
Red de icosaedros truncados



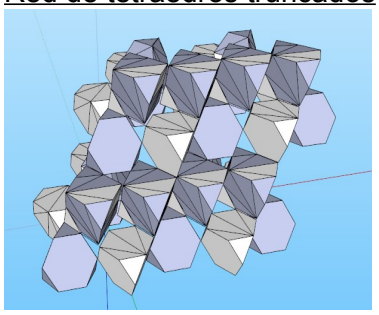
Red de cubos romos



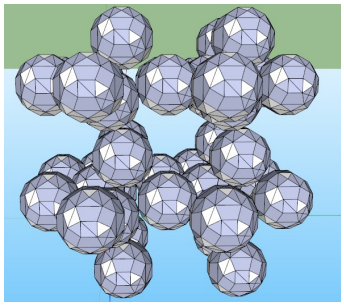
Dodecaedro romo



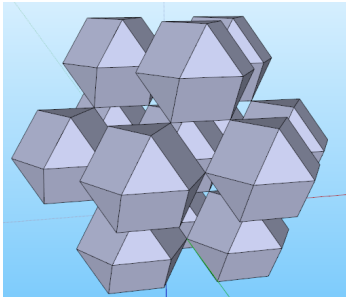
Red de tetraedros truncados



Red de rombicosidodecaedros



Red de cuboctaedros



2.2)Redes de sólidos con una cara en común

Aunque las redes ya mostradas son sin duda interesantes, ha sido la voluntad de los autores del trabajo el centrarse en un nuevo tipo de red compuesto por sólidos iguales.

Si dos poliedros son iguales, se deduce que sus caras son iguales. Por lo tanto es posible hacer que dos poliedros iguales compartan una cara.

En la construcción de estas nuevas redes, fue necesario recurrir a una metodología definida, propiciada por:

1)Los diagramas de Schlegel y el uso de simbología lógica

Nos permite predecir y delimitar la construcción de posibles redes. Estos diagramas permiten visualizar todas las caras y vértices de un poliedro, y por lo tanto facilitan la selección de caras que no conlleven una intersección de poliedros.

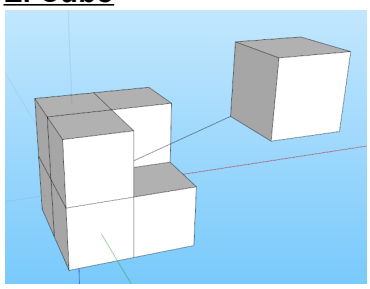
2)Ángulo de giro entre dos caras opuestas
Nos permite demostrar que muchas de las redes construidas son posibles sin tener que averiguar la distribución de los puntos de la red en el espacio.

3)Identificación de los “motivos mínimos” de la red, o los patrones que se repiten
Las redes que construiremos se basarán en infinitas traslaciones de los poliedros mencionados. Para facilitar la descripción de los mismos, distinguiremos los patrones de grupos de poliedros que observemos que se repiten en el espacio.
En general, en estos patrones distinguiremos dos subgrupos de poliedros: los “principales”, es decir, que tienen ocupadas el máximo número posible de sus caras por otros poliedros, y los “periféricos”, que no tienen ocupadas su máximo número de caras y suelen conectar dos poliedros “principales”.

4)Se recurren a planos de simetría para el cálculo de los vértices
Esto solo lo podremos hacer en el caso de que los poliedros no sean isomórficos, como ocurre con el cubo y el dodecaedro romo. La otra opción, que lleva mucho más tiempo, es la resolución de ecuaciones de tres incógnitas y segundo grado (realizando el cálculo de distancias).

Empezaremos con un ejemplo de este tipo de red, el cubo:

● **El Cubo**



1)Todas las caras de un cubo pueden ser compartidas por otros cubos de igual arista.
2)Un conjunto infinito de cubos que comparten una cara pueden rellenar el espacio sin dejar huecos, es decir, son teselables.
3)Siendo esta red espacial la más eficiente formada por cubos, pasamos a su descripción matemática:

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+n_1(1,0,0)+n_2(0,1,0)+n_3(0,0,1)$$

siendo n_1, n_2 y n_3 números enteros.

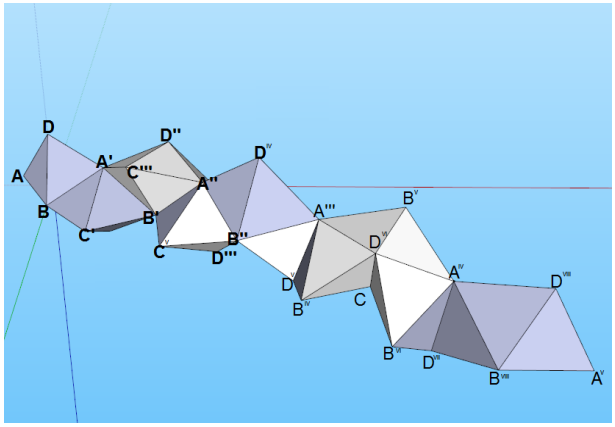
● **El Tetraedro regular**

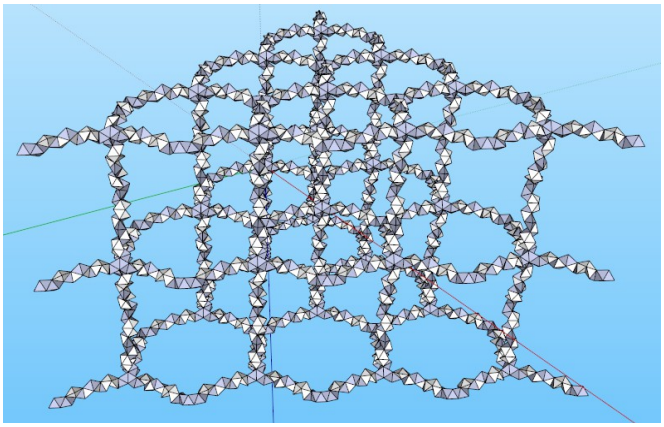
1)Todas las caras de un tetraedro pueden ser ocupadas por otros tetraedros. En futuras secuencias esto no es posible: los tetraedros intersecan.
El tetraedro es una figura que tiene algunas particularidades:
-Es el único sólido platónico sin ningún tipo de simetría bilateral o central.
-En consecuencia, carece de vértices opuestos y caras opuestas.
-Otra particularidad a destacar es que su poliedro dual es otro tetraedro.
Esto conlleva a que no hay caras cuyos planos sean paralelos; esto nos impide usar el ángulo de giro de caras opuestas. Por lo tanto tendremos que, o bien hallar experimentalmente una red de este tipo compuesta por tetraedros, o bien probar la imposibilidad de que esta exista.

Partiendo de un tetraedro inicial con vértices A, B, C, D en: $\begin{cases} A\left(\frac{-\sqrt{3}}{6},\frac{-1}{2},0\right) C\left(\frac{-\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},0\right) \\ B\left(\frac{2\sqrt{3}}{6},0,0\right) D\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \end{cases}$

Estos fueron algunos de los resultados obtenidos en la búsqueda de una red de este tipo que se buscó:

Resultado 1: Una secuencia de 30 tetraedros regulares da lugar a dos tetraedros aparentemente simétricos bilateralmente.





Comprobamos si esta estructura es posible:

Axioma I: Un tetraedro tiene 4 vértices
Axioma II: Si un tetraedro de vértices conocidos comparte una cara (de 3 vértices) con otro tetraedro, tres de los vértices de este segundo tetraedro serán conocidos.
Corolario I: El baricentro de estos tres vértices compartidos equidista del 4º vértice del tetraedro inicial y del segundo. Lo que quiere decir que:

Baricentro de cara elegida= $\frac{4^{to}\,vértice\,conocido + 4^{to}\,vértice\,desconocido}{2}$

4to vértice desconocido = 2*Baricentro - 4to vértice conocido

Baricentro = $\frac{(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)+(x_3,y_3,z_3)}{3}$

Aplicando esta fórmula sucesivamente obtendríamos las coordenadas de cada uno de los vértices de la red.
Para demostrar que el "Resultado 1" es posible, el vector $\overrightarrow{A''A'''}$ debe tener por cota 0, puesto que:

1)La "cadena" presentada tiene simetría rotacional de orden 2 (180º) respecto a la recta que pasa por el baricentro $B''C^{VI}D^{IV}$ y el vértice D^{IV}.
2)Si la cota del vector $\overrightarrow{A''A'''}$, que es normal respecto a la recta anterior, no fuera 0 el tetraedro inicial y final no estarían orientados de forma especular como se quiere, puesto que cumpliendo con la simetría anterior (1), la rotación respecto a una recta no vertical inclinaría el tetraedro final.

El recorrido de baricentros a lo largo de esta media cadena en la que se basa la estructura completa de la red es:

$$BCD \to A'BC \to A'BD' \to A'C'D' \to A'B'D' \to A'B'C'' \to A'B'D'' \to B'C'''D'' \to A''B'D'' \to$$
$$\to B'C'''A'' \to A''B'D''' \to A''C'''D''' \to A''B''D'''$$

Siendo A, B, C y D los vértices iniciales dados anteriormente. Aplicando la fórmula sucesivamente, tenemos que:

Tetraedro inicial

$$\begin{cases} A\left(\frac{-\sqrt{3}}{6},\frac{-1}{2},0\right) & C\left(\frac{-\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},0\right) \\ B\left(\frac{2\sqrt{3}}{6},0,0\right) & D\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \end{cases}$$

Tetraedro $A''B''C^{VI}D^{IV}$

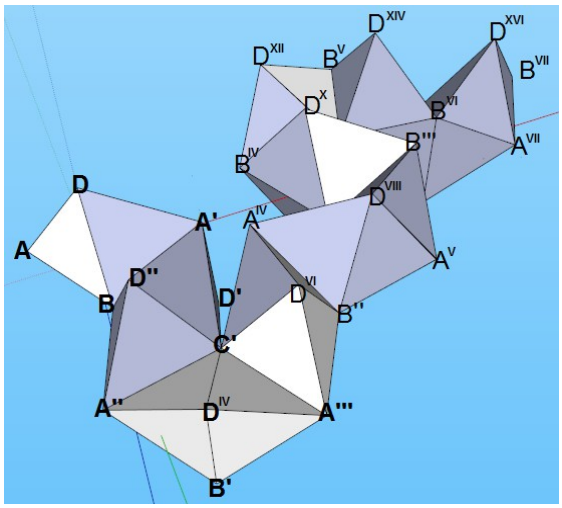
$$\begin{cases} A''\left(\frac{30127\sqrt{3}}{3^9\cdot 2},\frac{28975}{2\cdot 3^8},\frac{6400\sqrt{6}}{3^9}\right) & C^{VI}\left(\frac{7425917\sqrt{3}}{2\cdot 3^{14}},\frac{10073123}{2\cdot 3^{13}},\frac{952220\sqrt{6}}{3^{14}}\right) \\ B''\left(\frac{2009225\sqrt{3}}{3^{13}},\frac{1389080}{3^{12}},\frac{312004\sqrt{6}}{3^{13}}\right) & D^{IV}\left(\frac{14777840\sqrt{3}}{3^{15}},\frac{13890800}{3^{14}},\frac{7903009\sqrt{6}}{3^{15}}\right) \end{cases}$$

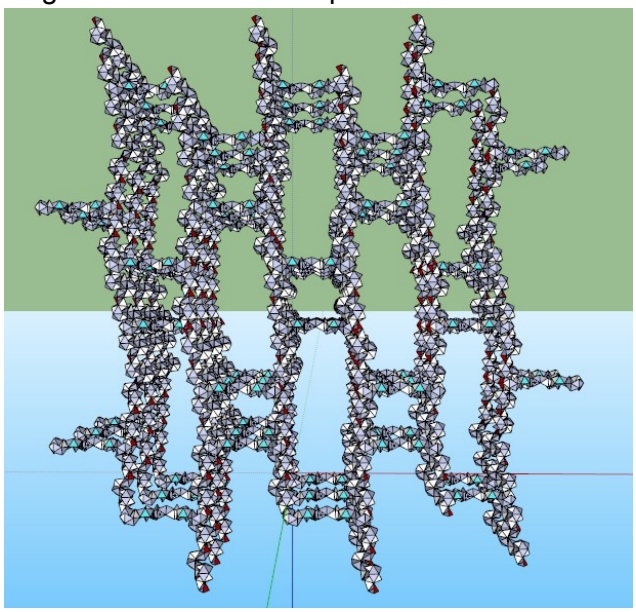
Hallamos también el vértice $A''' = \left(\frac{110111213\sqrt{3}}{2\cdot 3^{16}},\frac{102640493}{2\cdot 3^{15}},\frac{13139610\sqrt{6}}{43046721}\right)$

El vector $\overrightarrow{A"A'''}$ tendrá por cota $\overrightarrow{A"A'''},z=\frac{-858190\sqrt{6}}{3^{16}}\approx -0,0488336289856\neq 0$

Por lo tanto, la estructura presentada no se puede hacer con tetraedros regulares, por un margen de error de -0,0488336289856... en una longitud de 1,632993162....

Resultado 2: Una cadena de 35 tetraedros da lugar a dos tetraedros aparentemente trasladados.





Volvemos a comprobar si esta estructura es posible:
Realizaremos la operación:

4to vértice desconocido = 2*Baricentro - 4to vértice conocido

a lo largo de un recorrido de los baricentros de las caras:

$$BCD\rightarrow A'BC\rightarrow A'BD'\rightarrow A'BC'\rightarrow BC'D"\rightarrow A"BC'\rightarrow A"C'D'''\rightarrow A"B'C'\rightarrow B'C'D^{IV}$$

Para que el "Resultado 2" sea posible, se debe cumplir que el vector $\overrightarrow{A"A'''}$ tenga otra vez cota 0, porque:
-Este vector es el característico del plano que contiene a B'C'D^{IV} $\overrightarrow{A"A'''}\perp\pi\subset_{\triangle}B'C'D^{IV}$
-La estructura en la que se basa la red (imagen anterior a la izquierda) consta de cuatro partes con simetría especular dos a dos. Los planos de simetría son los que pasan por B'C'D^{IV} y A^{VI}C^{III}D^{XII}.
-Si el vector no tiene cota 0, el plano B'C'D^{IV} no será perpendicular al plano horizontal.

$$\overrightarrow{A"A'''}\neq(x_a,y_a,0)\Leftrightarrow\pi\subset_{\triangle}B'C'D^{IV}\neg\perp H\equiv z=0$$

-Si $\pi\subset_{\triangle}B'C'D^{IV}$ no es perpendicular a H, los tetraedros que pretendíamos que tuvieran simetría traslacional no la tendrán puesto que estarían orientados de distinta forma.

Por lo tanto pasamos a comprobar si $\overrightarrow{A"A'''}=(x_a,y_a,0),\|H\equiv z=0$

Tetraedro inicial ABCD

$$\begin{cases}A\left(\frac{-\sqrt{3}}{6},\frac{-1}{2},0\right)C\left(\frac{-\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},0\right)\\B\left(\frac{2\sqrt{3}}{6},0,0\right)D\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\end{cases}$$

Tetraedro A"B'C'D^{IV}

$$\begin{cases}A"\left(\frac{1277\sqrt{3}}{2\cdot3^6},\frac{-163}{2\cdot3^5},\frac{20\sqrt{6}}{3^6}\right) & C'\left(\frac{125\sqrt{3}}{2\cdot3^4},\frac{35}{2\cdot3^3},\frac{2\sqrt{6}}{3^4}\right)\\B'\left(\frac{8059\sqrt{3}}{3^8},\frac{616}{3^7},\frac{-1150\sqrt{6}}{3^8}\right) & D^{IV}\left(\frac{24056\sqrt{3}}{3^9},\frac{1880}{3^8},\frac{4585\sqrt{6}}{3^9}\right)\end{cases}$$

Calculamos también el valor del punto $A'''=\left(\frac{150245\sqrt{3}}{2\cdot3^{10}},\frac{45125}{2\cdot3^9},\frac{1622\sqrt{6}}{3^{10}}\right)$

Examinamos las cotas:

$A'', z \approx 0,0672013646854...$ Por lo que: $\overrightarrow{A''A'''}, z \neq 0 \rightarrow \overrightarrow{A''A'''} \neg \,||\, H \equiv z = 0$

$A''', z \approx 0,0672843293332...$

En consecuencia, la estructura presentada sigue siendo imposible, pero con un margen de error mucho más despreciable que anteriormente: debido a una diferencia de cota de $8,29646478 \cdot 10^{-5}$ en una longitud de $0,8164965809...$ unidades.

Demostración de la imposibilidad de construir una red de tetraedros regulares que compartan caras y se defina por vectores de traslación.

1)Imaginemos que se consigue trasladar el tetraedro inicial con un vector $\vec{v} = (a\sqrt{3}, b, c\sqrt{6})$.
En teoría se podría recrear la cadena responsable de dicha traslación con simetría especular y así se produciría una segunda traslación que fuera de la forma $\vec{w} = (0, b, 0)$
Sin embargo, se puede demostrar y demostraremos que un vector traslación de estas características en esta red es imposible.

2)Se parte de un tetraedro inicial de vértices ABCD, y se elige una cara arbitraria BCD para que la comparta con un tetraedro adyacente, teniendo este un cuarto vértice A'.
Se observa ahora que los denominadores de las coordenadas de este cuarto vértice A' tienen un factor primo 3 más que los otros cuatro vértices conocidos:

$$\begin{cases} A\left(\frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{-1}{2}, 0\right) C\left(\frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, 0\right) \\ B\left(\frac{2\sqrt{3}}{6}, 0, 0\right) D\left(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \end{cases} \quad A' = \left(\frac{5\sqrt{3}}{18}, \frac{5}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$$

En lo sucesivo, los próximos vértices se hallan siguiendo la fórmula:

$$4^{to}\ v\acute{e}rtice\ desconocido = 2 \cdot G - 4^{to}\ v\acute{e}rtice\ conocido$$

$$G = \frac{(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)}{3}$$

Teniendo en cuenta que en la suma y resta de fracciones se busca un común denominador, vemos cómo afecta esto a la obtención de nuevos vértices:
A' tiene coordenadas con denominadores $2 \cdot 3^2, 3\ y\ 3^2$
En cambio el resto de puntos tienen como máximo exponente 3^1.

Por lo tanto, al calcular el baricentro se tendrá que:
-X es el numerador de cualquiera de las coordenadas de A'; Y y Z lo son de B,C o D
- p_I es el producto de los factores primos que no son 3 del denominador de A'; p_{II}, p_{III} lo son de B,C o D.

$$Si:\ m-1 > a \geq b\ \ y\ \ X, Y, Z \neq \dot{3}$$

$$G = \frac{\frac{X}{p_I \cdot 3^{m-1}} + \frac{Y}{p_{II} \cdot 3^a} + \frac{Z}{p_{III} \cdot 3^b}}{3} = \frac{\frac{X \cdot p_{II} \cdot p_{III} + Y \cdot p_I \cdot p_{III} \cdot 3^{m-1-a} + Z \cdot p_I \cdot p_{II} \cdot 3^{m-1-b}}{mcm(p_I, p_{II}, p_{III}) \cdot 3^{m-1}}}{3} = \frac{X \cdot p_{II} \cdot p_{III} + Y \cdot \dot{3} + Z \cdot \dot{3} \neq \dot{3}}{3^m \cdot mcm(p_I, p_{II}, p_{III})} = \frac{\mu \neq \dot{3}}{p \cdot 3^m}$$

El numerador resultante no será múltiplo de 3, luego el exponente del denominador no se reducirá, es más, se irá incrementando poco a poco.

Retornando a la fórmula anterior $4^{to}\ v\acute{e}rtice\ desconocido = 2 \cdot G - 4^{to}\ v\acute{e}rtice\ conocido$
Ahora sabemos que 2G tiene más factores primos tres en su denominador que el cuarto vértice conocido, por lo que:

$$Si\ m > n \rightarrow 2 \cdot \frac{\mu \neq \dot{3}}{p \cdot 3^m} - \frac{\sigma \neq \dot{3}}{p' \cdot 3^n} = 2 \cdot \frac{\mu \neq \dot{3}}{p \cdot 3^m} - \frac{\sigma \cdot 3^{m-n} \cdot \frac{p}{p'}}{p \cdot 3^m} = \frac{\lambda \neq \dot{3}}{p \cdot 3^m}$$

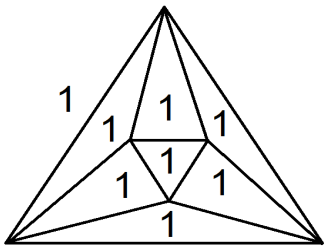
Esto demuestra que el exponente del factor 3 del denominador no se reducirá de ninguna de las

formas.

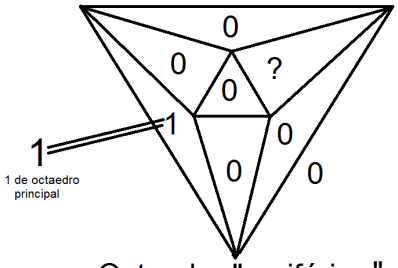
3)Se ha visto que a lo largo de la supuesta red los denominadores de las coordenadas (simplificadas al máximo) no pueden coincidir. Lo que implica que no se puede dar la traslación con vector $\vec{w} = (0, b, 0)$, y por lo tanto ninguna traslación de un tetraedro inicial.
La red de tetraedros que comparten una cara y se extienden por el espacio por vectores de traslación es, por tanto, imposible.

● **El Octaedro**

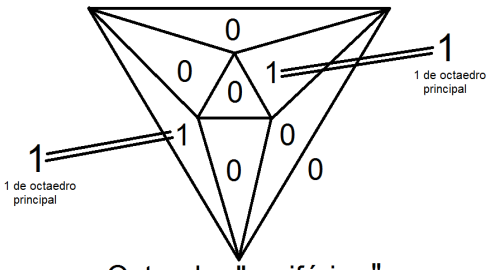
1)Las ocho caras de un octaedro pueden ser compartidas por otros octaedros. Sin embargo, no todas las caras de esta segunda capa de octaedros puede ser compartida con otro, puesto que intersecan.
Para mostrarlo, presentamos algunos diagramas de Schlegel con una notación propia, donde el 1 designa una cara del poliedro compartida con otro poliedro del mismo tipo y el 0 una cara que debe estar por fuerza libre puesto que de otro modo el poliedro intersecaría con otro:



Octaedro "principal"



Octaedro "periférico"



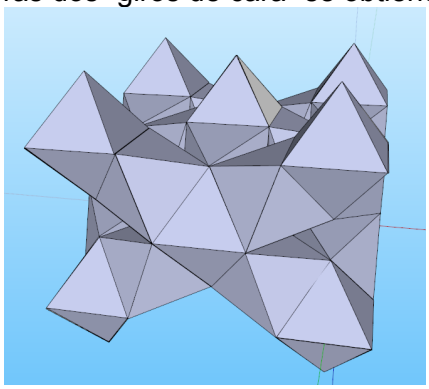
Octaedro "periférico"

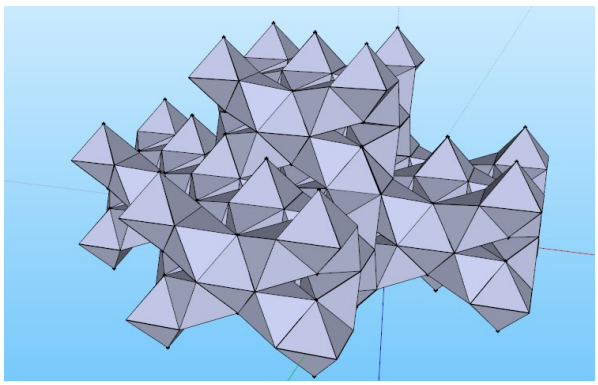
2)Como podemos ver, se puede construir una red que conste de octaedros “principales” (comparten sus 8 caras con otros octaedros) y octaedros “periféricos” (comparten menos de 8 caras).

2.1)Las caras opuestas del octaedro son simétricas respecto al centro, y por lo tanto son paralelas.

2.2)El ángulo de giro de estas dos caras opuestas es 180º.

2.3)Tras dos “giros de cara” se obtiene una traslación del octaedro inicial.





Pasamos ahora a la descripción geométrica de la red, que viene definida por:

$$\begin{cases} A\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) \\ C\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0\right) \\ D\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},0\right) \\ E\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0\right) \\ F\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} + n_1 \cdot \left(\frac{4}{3},0,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + n_2 \cdot \left(0,\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + n_3 \cdot \left(0,0,\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

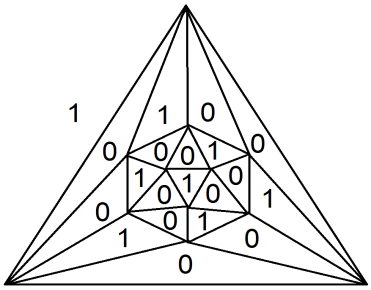
$$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$$

Los vértices del octaedro inicial se calcularon con herramientas matemáticas básicas (Teorema de Pitágoras), sabiendo que las aristas medirían 1 (por comodidad).

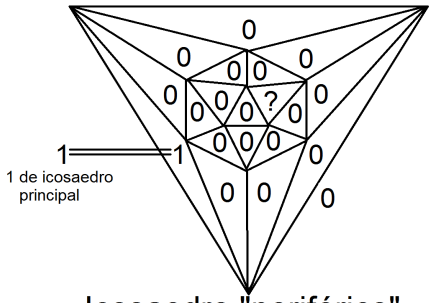
Los sucesivos puntos de la red se obtuvieron recurriendo a planos de simetría en las caras, lo cual nos permitió calcular los vectores de traslación.

● **El Icosaedro**

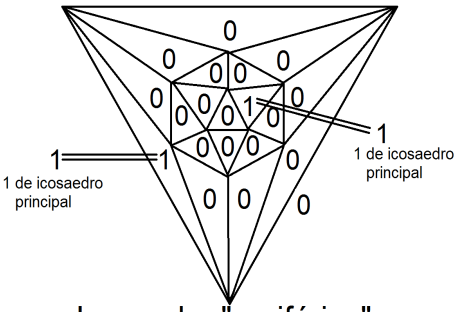
1)El icosaedro tiene veinte caras, pero no puede compartir todas sus caras con otros icosaedros a la vez, puesto que intersecarían. Mediante los diagramas de Schlegel se puede hallar el número máximo de poliedros que pueden compartir una cara con un icosaedro inicial.



Icosaedro "principal"



Icosaedro "periférico"

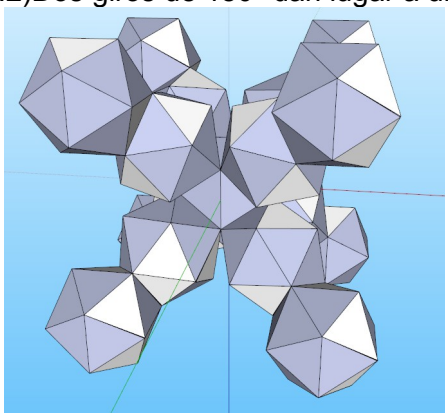


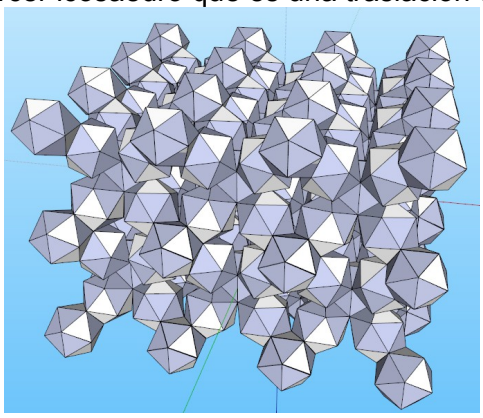
Icosaedro "periférico"

2)Se puede diseñar una red de icosaedros que comparten una cara, repitiendo por traslación una estructura que consta de un icosaedro "principal" (comparte las 8 caras que puede) y ocho icosaedros periféricos que se unen a otros ocho icosaedros "principales".

2.1)El ángulo de giro, como en el octaedro, vuelve a ser de 180º

2.2)Dos giros de 180º dan lugar a un tercer icosaedro que es una traslación del primero.





Pasando a la descripción matemática de la red se tendrá que calcular primero los vértices del patrón (al que llamaremos "Y") que se repite en el espacio (imagen de arriba a la izquierda), y luego los vectores de traslación que permiten que se repita este patrón en el espacio tridimensional.

"Y" consta de 13 icosaedros que suponen 168 vértices distintos:

1)Todas las permutaciones pares de $\left(\pm\frac{1+\sqrt{5}}{4},0,\pm\frac{1}{2}\right)$, con todas las combinaciones de signos posibles

$$A\left\{\begin{array}{l}\left(\pm\frac{\sqrt{5}+1}{4},0,\pm\frac{1}{2}\right)\\ \left(0,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\\ \left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{5}+1}{4},0\right)\end{array}\right.$$

Esto da lugar a los doce vértices de un icosaedro inicial situado en el origen: $12=2^2\cdot 3$

2)Todas las permutaciones pares de

$$\left(\pm\frac{3+2\sqrt{5}}{6},\pm\frac{9+\sqrt{5}}{12},\pm\frac{3+\sqrt{5}}{3}\right),\left(\pm\frac{25+11\sqrt{5}}{18+6\sqrt{5}},\pm\frac{2+\sqrt{5}}{9+3\sqrt{5}},\pm\frac{8+4\sqrt{5}}{9+3\sqrt{5}}\right),\left(\pm\frac{11+3\sqrt{5}}{12},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{6}\right)$$

con todas las combinaciones posibles de signos.

Da lugar a los icosaedros "periféricos" que comparten una cara con el icosaedro "principal" o inicial (esta cara ha sido omitida porque viene incluida en el apartado anterior).

3)Todas las permutaciones pares de

$$\left(\pm\frac{3+\sqrt{5}}{3},\pm\frac{9+2\sqrt{5}}{6},\pm\frac{9+\sqrt{5}}{12}\right),\left(\pm\frac{3+\sqrt{5}}{3},\pm\frac{9+2\sqrt{5}}{6},\pm\frac{15+7\sqrt{5}}{12}\right),\left(\pm\frac{3+\sqrt{5}}{3},\pm\frac{3+2\sqrt{5}}{6},\pm\frac{15+7\sqrt{5}}{12}\right)$$

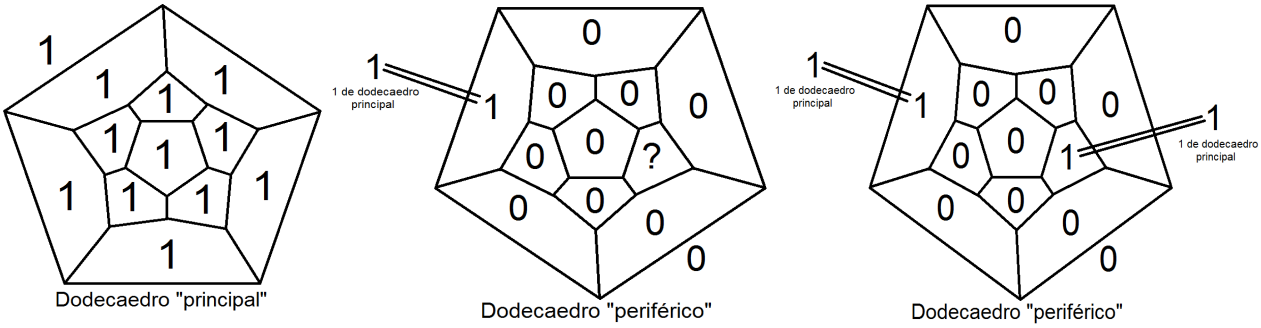
con todas las combinaciones posibles de signos.
Da lugar a los nuevos icosaedros principales, que son traslación del primer icosaedro. Se vuelve a omitir la cara que comparte con los icosaedros “periféricos”.

Descrito el patrón que se repite, ahora solo queda describir los vectores de traslación que indican dónde se ha de repetir esta estructura:

$$Y + n_1\left(\frac{2\sqrt{5}+6}{3},0,0\right) + n_2\left(0,\frac{2\sqrt{5}+6}{3},0\right) + n_3\left(0,0,\frac{2\sqrt{5}+6}{3}\right) \quad \text{donde } n_1,n_2,n_3 \in \mathbb{Z}$$

● **El Dodecaedro**

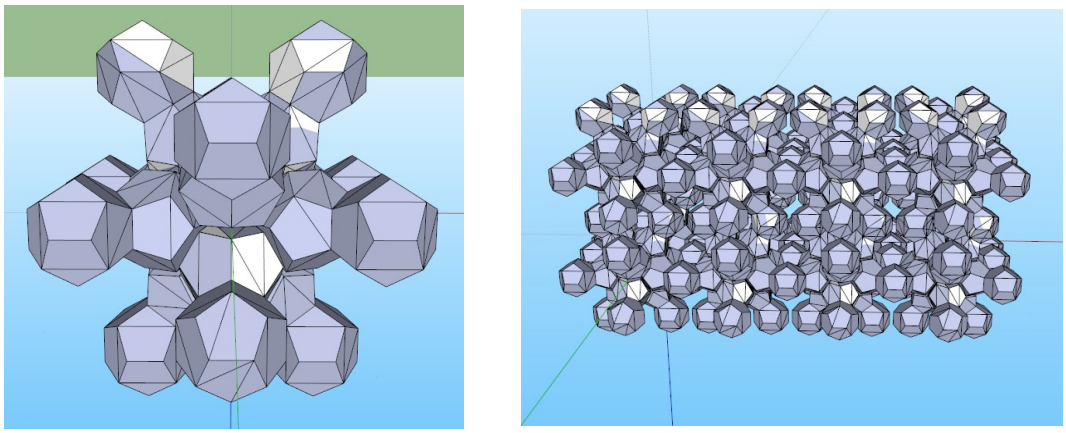
1)El dodecaedro tiene doce caras y sí puede compartir todas sus caras con otros dodecaedros. Pero todos estos dodecaedros periféricos no podrían compartir todas sus caras, puesto que intersecarían.



Dodecaedro "principal" Dodecaedro "periférico" Dodecaedro "periférico"

2)Otra vez, al encadenar tres dodecaedros se da que el giro total es de 360º, por lo que el tercer dodecaedro es una traslación del primero.

Habiendo visto esto, pasamos a mostrar gráfica y matemáticamente la red de dodecaedros adheridos cara con cara:



Para describir matemáticamente la red, describiremos primero el patrón de dodecaedros que se repiten (llamando al conjunto de vértices Z), y luego los vectores de traslación de este patrón para que la red se extienda por el espacio.

Z consta de 25 dodecaedros que en nuestro caso son 380 vértices, algunos compartidos entre dos dodecaedros. El conjunto de vértices Z consta de:

1)Los vértices de un dodecaedro “principal”, con centro en el origen, que tiene por coordenadas las permutaciones pares de:

$$\left(\pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(\pm\frac{1}{2},0,\pm\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

Con todas las combinaciones de signo posibles.
Se da lugar a los $2^3 + 2^2 \cdot 3 = 20$ vértices del dodecaedro inicial.

2)Los vértices de los ocho dodecaedro periféricos que comparten caras con el anteriormente mencionado, con coordenadas en las permutaciones pares de:

$$\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{10}}{5\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{-10\sqrt{2}-5\sqrt{10}+4\sqrt{15+5\sqrt{5}}+20\sqrt{3+\sqrt{5}}}{10\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(\pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{25\sqrt{2}+11\sqrt{10}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{-15\sqrt{2}-5\sqrt{10}+16\sqrt{15+5\sqrt{5}}+40\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(\pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{35\sqrt{2}+17\sqrt{10}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{-15\sqrt{2}-5\sqrt{10}+12\sqrt{15+5\sqrt{5}}+20\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(0,\pm\frac{10\sqrt{2}+3\sqrt{10}}{10\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{-5\sqrt{2}-5\sqrt{10}+16\sqrt{5+5\sqrt{5}}+40\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(0,\pm\frac{20\sqrt{2}+7\sqrt{10}}{10\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{-5\sqrt{2}-5\sqrt{10}+4\sqrt{15+5\sqrt{5}}+20\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(\pm\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{15\sqrt{2}+7\sqrt{10}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{3\sqrt{5}+5}{5}\right)$$

$$\left(\pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{10}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{10}+4\sqrt{15+5\sqrt{5}}+20\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(0,\pm\frac{\sqrt{10}}{10\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{10}+12\sqrt{15+5\sqrt{5}}+20\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(\pm\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{25\sqrt{2}+9\sqrt{10}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{\sqrt{5}+5}{5}\right)$$

Con todas las combinaciones de signos posibles.
Se da lugar a los $3\cdot 8\cdot 6+3\cdot 4\cdot 3=180$ vértices siguientes.

3)Los vértices de los ocho dodecaedros siguientes, que comparten caras con los anteriores. Si nos fijamos bien, son traslaciones respecto del primer dodecaedro, y actúan como “principales” puesto que tendrán adheridos otros doce dodecaedros.
Sus coordenadas son las permutaciones pares de:

$$\left(\pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{55\sqrt{2}+21\sqrt{10}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{-15\sqrt{2}-5\sqrt{10}+16\sqrt{15+5\sqrt{5}}+40\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(0,\pm\frac{30\sqrt{2}+13\sqrt{10}}{10\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{-5\sqrt{2}-5\sqrt{10}+16\sqrt{15+5\sqrt{5}}+40\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(\pm\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{35\sqrt{2}+11\sqrt{10}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{4\sqrt{15+5\sqrt{5}}+10\sqrt{3+\sqrt{5}}}{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{10}}{5\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{10\sqrt{2}+5\sqrt{10}+8\sqrt{15+5\sqrt{5}}+20\sqrt{3+\sqrt{5}}}{10\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(\pm\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{55\sqrt{2}+21\sqrt{10}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{10}+16\sqrt{15+5\sqrt{5}}+40\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(\frac{\pm 3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{25\sqrt{2}+11\sqrt{10}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{10}+16\sqrt{15+5\sqrt{5}}+40\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(0,\pm\frac{30\sqrt{2}+13\sqrt{10}}{10\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{10}+16\sqrt{15+5\sqrt{5}}+40\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(0,\pm\frac{10\sqrt{2}+3\sqrt{10}}{10\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{10}+16\sqrt{15+5\sqrt{5}}+40\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

$$\left(\pm\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{45\sqrt{2}+21\sqrt{10}}{20\sqrt{3+\sqrt{5}}},\pm\frac{4\sqrt{15+5\sqrt{5}}+10\sqrt{3+\sqrt{5}}}{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

Conociendo ya al conjunto de vértices Z al completo, se calcularon los vectores de desplazamiento que definen la red en todo el espacio tridimensional: $n_1,n_2,n_3\in\mathbb{Z}$

$$Z+n_1\left(\frac{8\sqrt{15+5\cdot\sqrt{5}}+20\sqrt{3+\sqrt{5}}}{5\sqrt{3+\sqrt{5}}},0,0\right)+n_2\left(0,\frac{8\sqrt{15+5\cdot\sqrt{5}}+20\sqrt{3+\sqrt{5}}}{5\sqrt{3+\sqrt{5}}},0\right)+n_3\left(0,0,\frac{8\sqrt{15+5\cdot\sqrt{5}}+20\sqrt{3+\sqrt{5}}}{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}\right)$$

● **<u>Sólidos arquimedianos no romos</u>**

El grupo de los sólidos arquimedianos abarca un conjunto de trece poliedros, de los cuales dos son romos (el cubo romo y el dodecaedro romo). Los otros once tienen una serie de particularidades que pasamos a mencionar:
-A excepción del tetraedro truncado y el cuboctaedro, todos tienen una simetría central.
-Por lo tanto, tienen caras y vértices opuestos.
-Al contar con distintos tipos de cara, se dan para cada sólido varias posibles redes poliédricas (en nuestras redes se ocuparán solo caras del mismo tipo).
-Tienen un gran número de vértices que van de los 12 del tetraedro truncado, a los 120 del icosidodecaedro truncado
Al no contar con espacio disponible, nos ahorramos el presentar los diagramas de Schlegel con las notaciones usadas hasta ahora. Y debido a su gran número de vértices, no podríamos describir los vértices de la red resultante (puesto que en promedio tendríamos que escribir 42,9 vértices por cada poliedro, lo que es inviable).

Sin embargo, sí demostraremos que las redes que mostraremos sí se pueden formar:

Axioma I: Estos poliedros, salvo el tetraedro truncado y el cuboctaedro, tienen simetría central.

Axioma II: La operación equivalente a un centro de simetría es un giro de 180º

Corolario I: Por lo tanto, dos caras opuestas tendrán un giro de 180º una respecto de otra.

Corolario II: Dos poliedros de este tipo que compartan una cara suman dos giros de 180º, es decir, 360º.

Corolario III: En una cadena de tres sólidos de este tipo alineados, el tercero será una traslación del primero.

Se puede repetir este proceso en cualquier dirección, lo que posibilita todas las redes que hemos realizado.

Las redes formadas se mostrarán en el *Anexo I*.

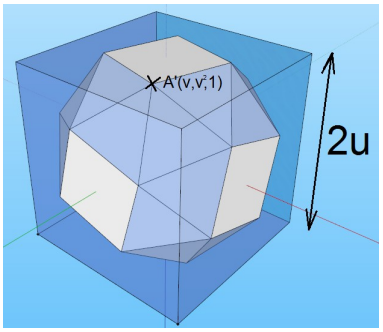
● **El Cubo romo (C.R.)**

Este poliedro, al igual que el dodecaedro romo, carece de simetría central, lo que dificulta la construcción de su red. La carencia de simetrías centrales o bilaterales en el cubo romo impiden construir redes como hasta ahora.

Por lo tanto, solo podremos hacer aproximaciones a la red que buscamos:

-Cálculo del giro de dos caras opuestas

Estudiemos el cubo romo:



-Se puede inscribir a un cubo

-Se ha comprobado que las coordenadas de un cubo romo como el de la izquierda son todas las permutaciones pares de:

$$\left(\pm\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}+\sqrt{\frac{-\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}-\frac{1}{3}\right),\pm\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}+\sqrt{\frac{-\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}-\frac{1}{3}\right)^2,\pm 1\right)$$

-Tiene por caras 6 cuadrados y 32 triángulos. Se observa que solo los cuadrados y los triángulos que no comparten arista con un cuadrado tienen caras opuestas que pertenecen a planos paralelos:

Si el ángulo de giro (en grados sexagesimales) entre dos caras opuestas fuera racional, una sucesión de giros daría por resultado un múltiplo de 360º, lo que significaría que un cubo romo de la "cadena" resultante estaría orientado como el primero, es decir, se habría trasladado.

Comprobamos el ángulo de giro de dos caras opuestas cuadradas:

$$A=\left(\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}+\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}-\frac{1}{3}\right)^2,-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}-\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}+\frac{1}{3},1\right)$$

$$B=\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}+\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}-\frac{1}{3},-\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}+\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}-\frac{1}{3}\right)^2,-1\right)$$

$$A'=\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}+\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}-\frac{1}{3},\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}+\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}-\frac{1}{3}\right)^2,1\right)$$

$$B'=\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}+\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}-\frac{1}{3}\right)^2,\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}+\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}-\frac{1}{3},-1$$

$$\overrightarrow{AA'}=\left(\frac{5\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}+\frac{5\cdot\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}-\left(\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}},\frac{5\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}+\frac{5\cdot\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}+\left(\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3},0\right)$$

$$\overrightarrow{BB'}=\left(\frac{5\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}+\frac{5\cdot\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}-\left(\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}},-\frac{5\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}-\frac{5\cdot\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}-\left(\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3},0\right)$$

$Si\ \widehat{\overline{AA'},\overline{BB'}} = \alpha$

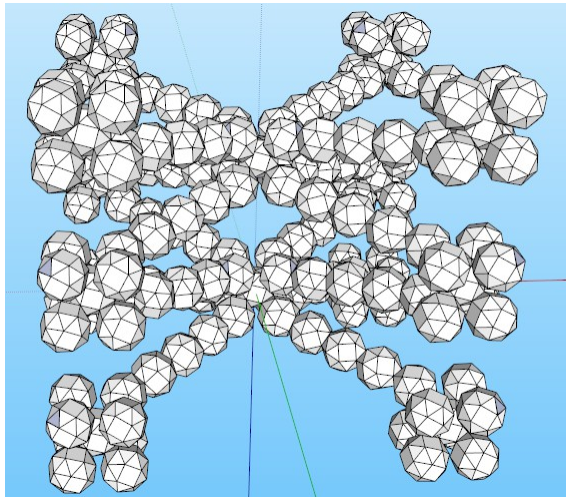
$$\alpha = ar\cos\left(\frac{\left|\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}\right|}{\left|\overline{AA'}\right|\cdot\left|\overline{BB'}\right|}\right) = ar\cos\frac{\left(\frac{5\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}+\frac{5\cdot\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}-\left(\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(\frac{5\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}+\frac{5\cdot\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}+\left(\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{5\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}+\frac{5\cdot\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}-\left(\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(\frac{5\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}+\frac{5\cdot\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}}}{3}+\left(\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(-\frac{\sqrt{33}}{9}+\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\right)^2} =$$

$$= \alpha = 32,9351208007726...^{o}$$

Al ser este ángulo irracional, no se podrá producir el giro de 360º deseado, por lo que no se puede construir la red deseada por este procedimiento.
A su vez, se calculó mediante el mismo procedimiento el ángulo de giro de caras triangulares opuestas, lo que nos dio un resultado de 34,3457514...º, también irracional.

-Aproximación a la solución

Viendo que no podremos construir una red basándonos en el giro que van realizando las caras cuadradas a lo largo de una cadena o sucesión de cubos romos, tendremos que proceder a encontrar una aproximación gráfica de lo que podría ser una solución:



Se observa que mediante esta aproximación se obtiene una red que aparentemente sí satisfaría nuestras exigencias.
Aunque en el programa de Sketch-up no se pudiera apreciar error alguno, esta construcción es falsa hasta que se pruebe lo contrario; solo pretende ser una aproximación.

● **El Dodecaedro romo**

A su vez, el dodecaedro romo es aún más difícil de describir geometralmente que el poliedro anterior, por lo que solo podremos trabajar con él de una forma bastante limitada. Entre los factores que limitan nuestro trabajo se incluye:
-Imposibilidad de describir los 60 vértices que tiene, y menos una red como la que buscamos

-Vértices se encuentran en coordenadas de difícil trabajo (Anexo II).
Sus vértices se sitúan en las permutaciones pares de:

$$(\pm 2\alpha, \pm 2, \pm 2\beta)$$

$$\left(\pm\left(\alpha+\frac{\beta}{\phi}+\phi\right),\pm\left(-\alpha\phi+\beta+\frac{1}{\phi}\right),\pm\left(\frac{\alpha}{\phi}+\beta\phi-1\right)\right)$$

$$\left(\pm\left(\frac{-\alpha}{\phi}+\beta\phi+1\right),\pm\left(-\alpha+\frac{\beta}{\phi}-\phi\right),\pm\left(\alpha\phi+\beta-\frac{1}{\phi}\right)\right)$$

$$\left(\pm\left(\frac{-\alpha}{\phi}+\beta\phi-1\right),\pm\left(\alpha-\frac{\beta}{\phi}-\phi\right),\pm\left(\alpha\phi+\beta+\frac{1}{\phi}\right)\right)$$

$$\left(\pm\left(\alpha+\frac{\beta}{\phi}-\phi\right),\pm\left(\alpha\phi-\beta+\frac{1}{\phi}\right),\pm\left(\frac{\alpha}{\phi}+\beta\phi+1\right)\right)$$

Con un número par de signos positivos, siendo:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \alpha = \xi - \frac{1}{\xi} \qquad \beta = \xi\phi + \phi^2 + \frac{\phi}{\xi}$$

Y donde: $$\xi = \sqrt[3]{\frac{\phi}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\phi-\frac{5}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{\phi}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\phi-\frac{5}{27}}}$$

-Carencia de simetrías que nos faciliten el trabajo

Como antes, realizaremos dos aproximaciones a la resolución del problema:

-Cálculo del giro de dos caras opuestas

Debido a la complejidad que tiene la descripción de los vértices, el software usado para el cálculo no pudo llevarlo a cabo.

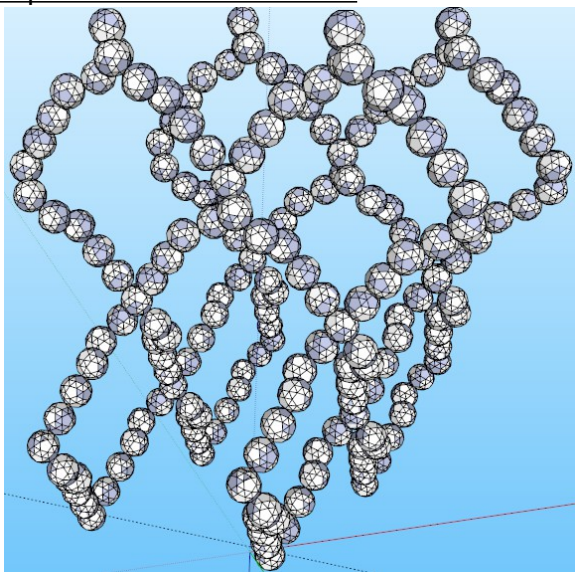
A falta de otras alternativas, se usaron coordenadas con dos decimales y se realizó el cálculo, que dio lugar a los siguientes resultados:

-Ángulo de giro de caras pentagonales opuestas: 10,85...º

-Ángulo de giro de caras triangulares opuestas: 20,74...º

En apariencia estos ángulos serían irracionales, por lo que no se podría construir una red exacta realizando una cadena de dodecaedros romos alineados.

-Aproximación a la solución



Como no podemos construir la red con el método citado anteriormente, tendremos que hacer una aproximación de lo que sería una red de dodecaedros romos que comparten una cara.

Como antes, esta red debe ser considerada como una aproximación, y será falsa a menos que se pruebe lo contrario. Sin embargo, en el programa no se pudo detectar ninguna característica que diera a pensar que sí lo fuera.

En esta red en concreto, las caras que son compartidas entre dos dodecaedros romos son algunas de las caras triangulares no adyacentes a otra cara pentagonal (solo adyacentes a caras triangulares).

3)CONCLUSIONES

Los autores de este trabajo creemos haber resuelto las cuestiones y objetivos que se plantearon al inicio del proyecto. Respecto al objetivo principal, que era el diseño de redes poliédricas que se repitieran en el espacio siguiendo ciertos patrones, creemos haberlo cumplido ampliamente. Es así que:

-Hemos recorrido todos los sólidos platónicos y arquimedianos, en relación con cada uno de los tipos de red que nos habíamos planteado al principio de nuestro trabajo.

-Se han descrito matemáticamente estas redes, vector por vector, siempre que nos fue posible y las características del poliedro nos lo permitiera.

-Hemos recurrido a una metodología y a unas herramientas que han facilitado en gran medida el trabajo.

En cuanto a los poliedros romos (el cubo romo y el dodecaedro romo), carecemos del tiempo y de los conocimientos como para diseñar una red definida en el espacio, y nos tendremos que contentar con la aproximación que hemos hecho.

Esta aproximación gráfica, aunque aparentemente cumple con lo que nos habíamos propuesto, debe considerarse falsa hasta que se haya calculado lo contrario. No hay evidencias que apunten que la distribución que hemos propuesto, arbitraria como es, sea la solución exacta y no aproximada al problema. Teniendo en cuenta que estos poliedros son los que más dificultades presentan a los propios geómetras, y a la dificultad de sus coordenadas, ha sido en nuestra opinión todo un logro.

Además y por si fuera poco, un trabajo geométrico como este que gira en torno a ciertos tipos de redes puede tener múltiples aplicaciones en lo que serían materias técnicas (como la arquitectura o la ingeniería), la química la medicina e incluso la propia geometría. Algunas de estas

aplicaciones pueden verse en los links propuestos en el apartado de la *Bibliografía*.

Y ahora que el trabajo está llegando a su fin, tenemos que decir que ha sido un auténtico honor para nosotros el mero hecho de haber realizado nuestro trabajo, con todo el esfuerzo que ha supuesto. La geometría nos ha permitido vislumbrar la belleza que subyace bajo algo tan simple como un tetraedro. Investigar esta belleza ha sido una tarea fascinante...Porque, ¿quién ha dicho que las matemáticas no sean bellas?

4)BIBLIOGRAFÍA

Contexto histórico:
"El libro de las matemáticas", de Clifford A. Pickover, editorial Librero
http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2014/03/04/137736

Aspectos generales de los sólidos tratados:
http://www.gonzalezmari.es/POLIEDROS_TEOR_A.pdf
http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=12407:solidos-arquimedianos-conceptos-avanzados&catid=199:herramienta-zome&directory=67
http://www.grupoalquerque.es/ferias/2010/archivos/poster/solidos_arquimedianos.pdf
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Los%20solidos%20platonicos.pdf

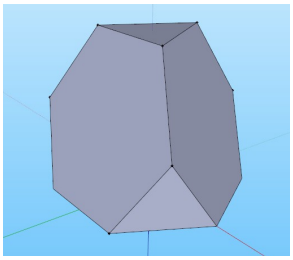
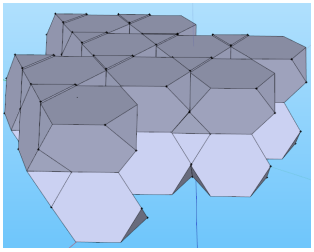
Información más detallada acerca de poliedros en particular:
http://www.emis.de/journals/BAG/vol.43/no.1/b43h1wem.pdf
http://paulscottinfo.ipage.com/polyhedra/semiregular/snub-cube.html
http://readtiger.com/wkp/en/Archimedean_solid
http://www.emis.de/journals/BAG/vol.43/no.1/b43h1wem.pdf
http://mathworld.wolfram.com/SnubDodecahedron.html

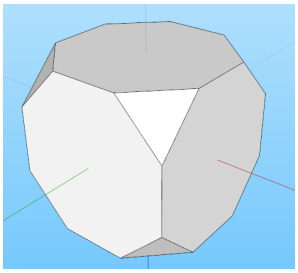
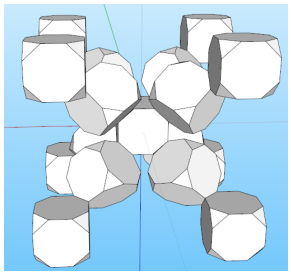
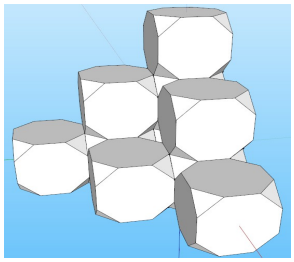
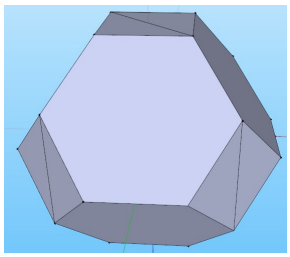
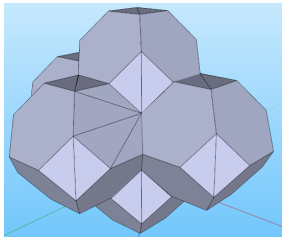
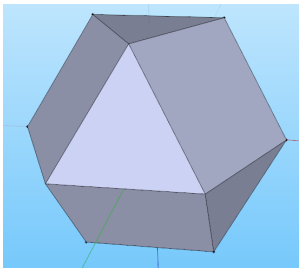
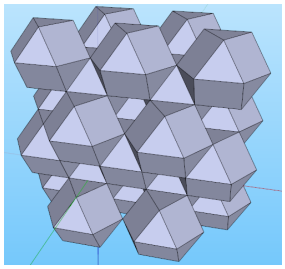
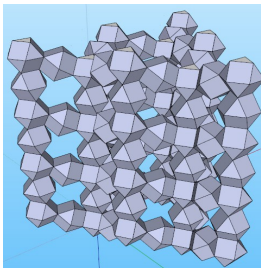
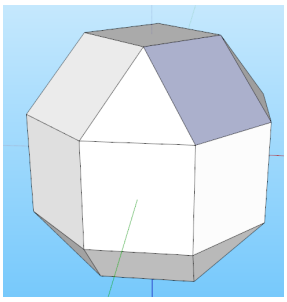
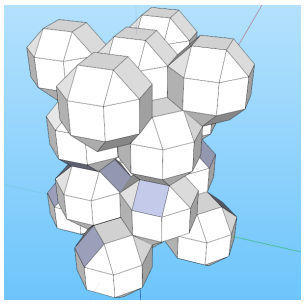
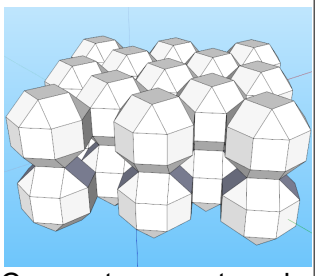
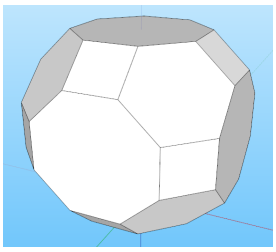
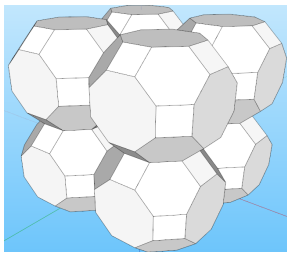
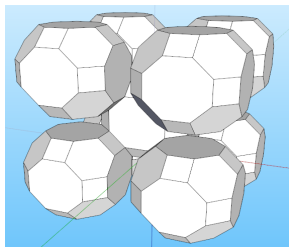
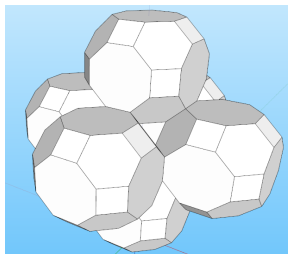
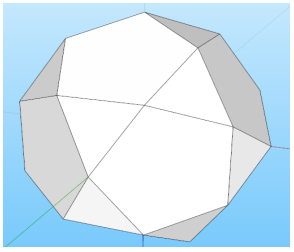
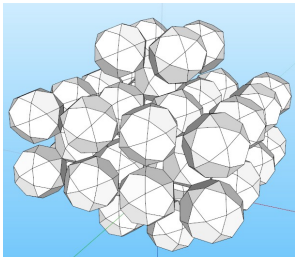
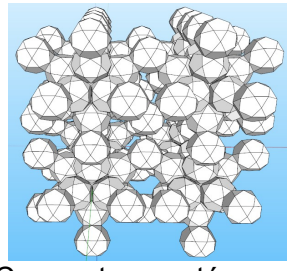
Conceptos de geometría adicionales
http://poliedrosarquimedianos.blogspot.com.es/
http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2014/04/07/137876
http://es.wikipedia.org/wiki/Simetr%C3%ADa#Simetr.C3.ADa_en_geometr.C3.ADa

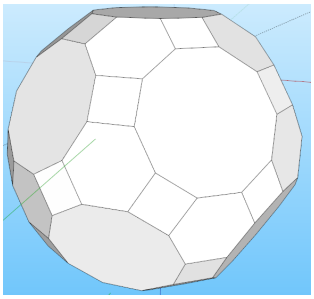
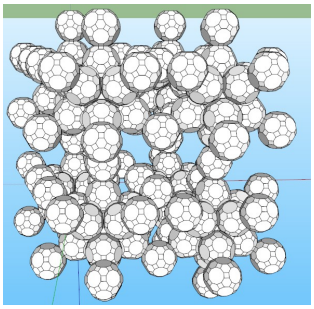
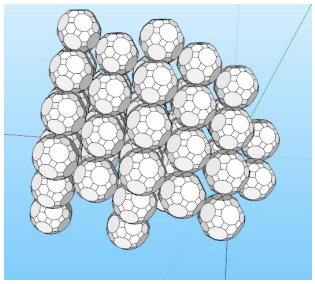
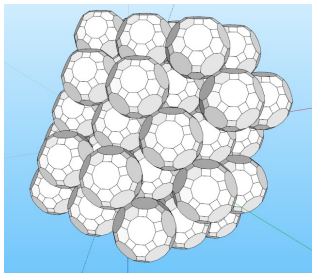
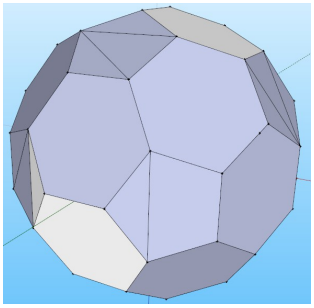
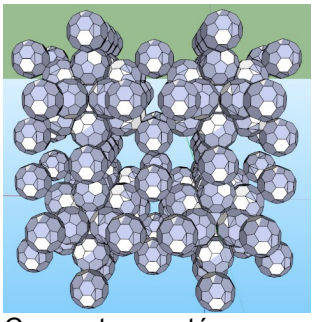
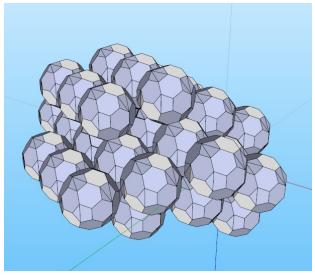
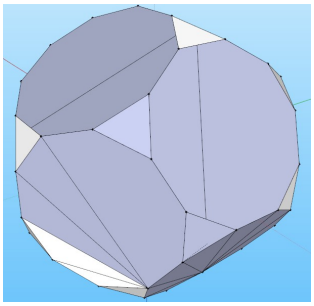
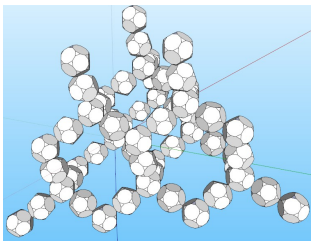
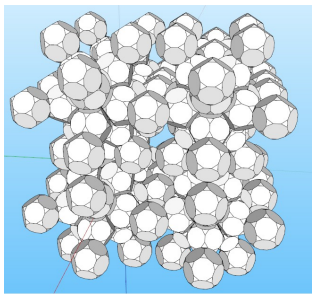
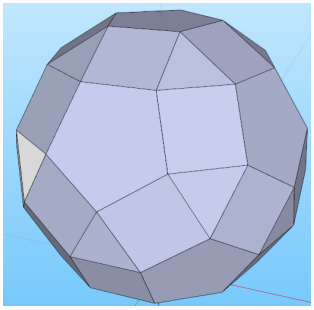
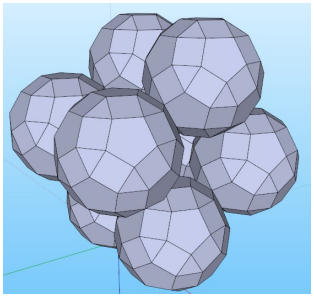
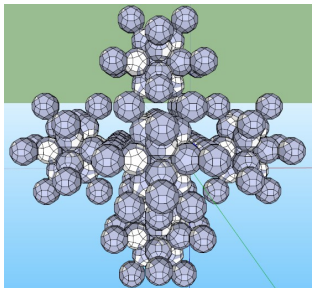
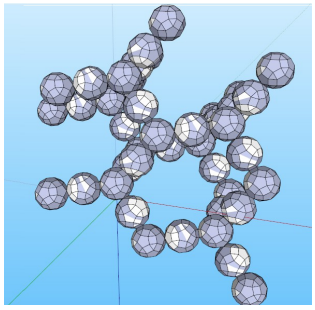
Aplicaciones de este trabajo
http://www.flextegrity.com/about-us/development-status.php
http://www.edgargonzalez.com/category/green/
http://noticierodiario.com.ar/una-nueva-tecnica-sintetiza-un-mineral-para-crear-combustibles-mas-limpios/
http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen2/ciencia3/059/htm/sec_9.htm
http://www.abc.es/20100611/ciencia/esponja-menger-201006110947.html

5)ANEXOS

5.1)Anexo I

Sólido arquimediano	Distintas redes de cada sólido que comparte cierto tipo de cara		
 Tetraedro truncado	 Comparten ambas		

 Cubo truncado	 Comparten triángulos	 Comparten octógonos	
 Octaedro truncado	 Comp. todas sus caras		
 Cuboctaedro	 Comparten cuadrados	 Comparten triángulos	
 Rombicuboctaedro	 Comparten cuadrados	 Comparten resto de cuadrados	
 Cuboctaedro truncado	 Comparten octógonos	 Comparten hexágonos	 Comparten cuadrados
 Icosidodecaedro	 Comparten triángulos	 Comparten pentágonos	

 Icosidodecaedro truncado	 Comparten decágonos	 Comparten cuadrados	 Comparten hexágonos
 Icosaedro truncado	 Comparten pentágonos	 Comparten hexágonos	
 Dodecaedro truncado	 Comparten triángulos	 Comparten decágonos	
 Rombicosidodecaedro	 Comparten cuadrados	 Comparten pentágonos	 Comparten triángulos

5.2)Anexo II: coordenadas del dodecaedro romo

Las coordenadas aproximadas al sistema decimal son las permutaciones pares de las siguientes expresiones numéricas, con un número par de signos positivos (a tales efectos las coordenadas que ahora se presentan negativos se considerarán positivos):

x	y	z
± 2,265323	± 2	± 12,67404
± 6,667191	± 5,122370	± 9,953540
± 10,55349	± 1,165799	± 7,551673
± 8,553493	± -4,40187	± 8,787741
± 3,431123	± -3,88630	± 11,95354

Como vimos, estas coordenadas escapaban evidentemente de nuestro nivel. Por lo tanto, se extrajeron estas coordenadas de la página:
http://eusebeia.dyndns.org/4d/snubdode
Comprobamos la veracidad de estas coordenadas, hallando que en efecto se forma un dodecaedro romo de arista 6,0437... inscriptible a una esfera de radio 13,0293...