TEORÍA DE SELECCIONES Y ESPACIOS UNIFORMES

Enrique Outerelo Domínguez

Introducción.

- Compañeros y amigos: Es para mí un gran honor que el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid (UAM) me propusiera para hablar en este acto de homenaje a Juan Fontanillas Royes, alumno, compañero de tareas docentes en la Universidad de Madrid (UM) y buen amigo, con motivo de su jubilación.

- Juan Fontanillas Royes nació el 28 de mayo de 1941 en Valls (Tarragona).
- Realizó los estudios del Bachillerato elemental en su ciudad natal y completó los estudios de Bachillerato en la Universidad Laboral de Sevilla.
- En el curso 1959-1960 estudia el curso Selectivo de Ciencias en la Universidad de Sevilla, y en el curso 1960-1961 se traslada a la Universidad de Madrid para iniciar los estudios de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas (anteriormente la Licenciatura en matemáticas tenía un primer curso selectivo especial : Análisis Matemático I, Geometría métrica y Física general). Estos estudios los termina en el año1964.

- Conocí a Juan Fontanillas, en el curso 1963-1964, como alumno en las clases prácticas de la Asignatura de Topología que existía en el 5º curso de la Licenciatura. La topología aparece por primera vez como asignatura, en los planes de estudio de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, en el plan de estudios de 1943 y se imparte por primera vez en la UM en el curso académico de 1947-1948. Con algunas dudas, creo que el primer profesor fue el Catedrático D. Tomás Rodríguez Bachiller.

Obtenida la Licenciatura en Ciencias (Sección de Matemáticas) en la Universidad de Madrid, en ese mismo año de 1964, comienza Juan Fontanillas a trabajar en la Universidad de Madrid, (recuerdo que esta Universidad pasa sólo a denominarse *Complutense* (UCM) en sus estatutos de 1971, desarrollo de la LGE de 1970), en la Cátedra de Geometría Analítica y Topología que desempeñaba D. Francisco Botella Raduán (Catedrático de Barcelona desde 1942, se traslada a la UM en 1950). El Profesor Botella sería el Director de su tesis doctoral (*Funtores y Cohomologías Periódicas*, 1970).

- Era la época en que las células básicas de funcionamiento de las Universidades eran las cátedras y el Catedrático titular tenía el poder absoluto para nombrar a sus colaboradores y ayudantes.
- En este caso concreto, conservo una copia (hecha a máquina con papel carbón) de un oficio, con fecha 17 de mayo de 1966, del Profesor Botella al Decano de la Facultad de Ciencias de la UM en el que se propone una asignación anual de 15.000 pesetas al Ayudante de la Cátedra D. Juan Fontanillas Royes.

- En esta etapa de 1964-1970, Fontanillas fue Ayudante de clases prácticas y Profesor Adjunto interino de Geometría Analítica y Topología, impartió clases prácticas de varias asignaturas, entre las que estaba la Topología I (4º Curso de la licenciatura), asignatura de nueva creación que comenzó a impartirse en el curso 1966-1967. He tenido la satisfacción de impartir esta asignatura desde sus comienzos hasta su desaparición en el curso 1999-2000, al implantarse un nuevo plan de estudios (1995). Esto quizás no hubiera sido posible en esta Universidad.

- Además, en esta etapa, Fontanillas redactó el curso sobre la Teoría K impartido por el Profesor P. Ver Eecke, en 1969, en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Madrid (¡No es equivocación!, se trata del primer intento de estructurar la Universidad española en Departamentos (Ley Lora Tamayo de 1965). Como se trataba de romper la tradición de siglos de las cátedras, estos departamentos, salvo excepciones, funcionaron como meras asociaciones de Cátedras que conservaron su independencia. Pero la semilla estaba sembrada y germinaría en 1983 con la LRU).
- Su formación en la Teoría K, la completó Fontanillas en Estrasburgo, con Max Karoubi, donde pasó los cursos académicos de 1970-1971 y 1971-1972 con una beca de formación del personal investigador

- También sobre esta misma teoría expuso y publicó en el Seminario de Topología de la UCM una memoria titulada *K-Teoría infinito-dimensional y variedades de Fredholm* (1972-1973). Juan con el buen humor que le caracteriza denominaba a los operadores de Fredholm con el nombre de *fréjoles.*

- De todas esta actividades en la UM he tenido ocasión de comprobar la excelente formación matemática de Juan Fontanillas, en especial en el campo de la Topología, y en cuanto a la docencia sus explicaciones siempre han sido rigurosas, precisas y claras, lo que le han convertido en un Profesor muy exigente, con el ciclo evolutivo de todo profesor, en general, que se resume con el conocido adagio: Al principio Sancho el Bravo, a la mitad Sancho el Fuerte (profesor exigente explicando topología) y al final Sancho Panza (dando clases en las escuelas de ingenieros).

Como anécdota, me recordaba Juan, paseando el pasado martes por los pasillos de esta Universidad, que en un determinado día, de aquellos lejanos tiempos, le endosé la difícil tarea de sustituirme en las explicaciones teóricas de Topología I con el agravante de tener que rectificar lo que había explicado, pues el día anterior me había equivocado en la demostración del teorema que tocaba. Por lo dicho anteriormente, Juan salió airoso del trance.

- De su actividad investigadora daré unas pinceladas más adelante.

A su regreso de Estrasburgo, Fontanillas se incorpora ya a la Universidad Autónoma de Madrid como Profesor Agregado interino (Propuesto por uno de los primeros Catedráticos de esta Universidad D. José Antonio Fernández Viña, que más tarde se trasladaría a la Universidad de Murcia) y en el año 1976 ingresa en el Cuerpo de Profesores Adjuntos de Universidad, cuerpo que con la LRU (1983) se convierte en el de Profesores Titulares de Universidad.

- Las andanzas de Fontanillas en esta Universidad las conocéis todos y no voy a referirme a ellas.

15-11-1966: San Alberto Magno


MAR • 70

Teoría de selecciones

- En la teoría de selecciones se tiene la formulación más general de uno de los problemas más importantes de la Topología, el problema de extensión cuya formulación es la siguiente:
- (A) Sean X, Y espacios topológicos, A un subespacio de X (usualmente cerrado) y g una aplicación continua de A en Y. ¿Existe f, aplicación continua de X en Y tal que f coincide con g sobre A?

- También es importante el caso en que la extensión sólo está definida sobre un abierto que contiene al subespacio *A.*

  Cuando la topología subyace en una estructura más rica, por ejemplo, variedad diferenciable, espacio uniforme,.., a las funciones se les exige ser funciones diferenciables, uniformemente continuas. .
- Finalmente otro caso importante corresponde a la situación de exigir a la función extensión que tome valores en un subconjunto que previamente se ha asignado a cada punto del espacio *X.*

- Son de sobra conocidos los teoremas clásicos de extensión de Tietze que asegura la extensión continua de funciones continuas definidas sobre un cerrado de un espacio normal con valores en un cubo topológico, y el teorema de extensión o fórmula de extensión de Dugundji–Borsuk que establece la existencia de extensiones continuas de funciones continuas sobre un cerrado de un espacio métrico con valores en un espacio vectorial topológico localmente convexo.

- (B) Para formular la teoría de selecciones, iniciada por Ernest Michael en la década de los años cincuenta del siglo pasado (1956), necesitamos considerar las denominadas *funciones multívocas* entre conjuntos y en especial entre espacios topológicos.

- Dado un conjunto Y, designamos por $\mathscr{P}^*(Y)$ el conjunto de partes no vacías de Y.

- Dados dos conjuntos X, Y una *función multívoca* φ entre ellos es una aplicación (función unívoca) de X en $\mathscr{P}^*(Y)$.

- La teoría de selecciones estudia la extensión de funciones continuas (selecciones) entre espacios topológicos subordinadas a funciones multívocas.
- Si φ es una función multívoca entre los espacios topológicos X e Y, una selección (continua) de φ es una aplicación continua $f:X\rightarrow Y$ tal que $f(x)$ es un elemento de $\varphi(x)$ para todo elemento x de X.
- Dada φ ¿existe una selección de φ?

- Los problemas (A) y (B) admiten una formulación más general en términos de selecciones:
- (C) Sean X, Y espacios topológicos, A un subespacio de X y φ una función multívoca de X en Y. ¿En qué condiciones una selección de φ/A admite una extensión que es selección de φ? , o ¿En qué condiciones una selección de φ/A admite una extensión, a un entorno abierto U de A que es selección de φ/U?

- El problema de extensión queda incluido en la teoría de selecciones, pues si X e Y son espacios topológicos, A es un subespacio de X y $g:A\to Y$ es una aplicación continua, las extensiones continuas $f:X\to Y$ de g son las selecciones continuas de la aplicación multívoca φ de X en Y definida por
- $\varphi(x)=\{g(x)\}$, si $x\in A$,
- $\varphi(x)=Y$, si $x\in X-A$.

- De los importantes resultados de la teoría de selecciones, recuerdo el siguiente:
- Una aplicación multívoca φ del espacio topológico X en el espacio topológico Y es *semicontinua inferiormente* si para todo abierto G de Y, el conjunto
- $\{x: \varphi(x) \cap G$ *es distinto del vacío*$\}$
- es un abierto de X.
- Sean X, Y espacios topológicos, A un subespacio cerrado de X y $g: A \to Y$ una aplicación continua. Entonces, la función multívoca $\varphi(x)=\{g(x)\}$, si $x \in A$, $\varphi(x)=Y$, si $x \in X-A$, es semicontinua inferiormente.

- Para obtener este último resultado, importante para conseguir resultados sobre el problema de extensión a partir de la teoría de selecciones, basta observar que para todo abierto G del espacio Y, se verifica que el conjunto
- $\{x: \varphi(x) \cap G$ *es distinto del vacío*$\}$
- es igual a $(X-A) \cup U$, donde U es un abierto de X con $U \cap A = g^{-1}(G)$, que es un abierto de X.

- TEOREMA (E. Michael): Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Entonces, X es paracompacto (todo recubrimiento abierto tiene un refinamiento abierto localmente finito) si y sólo si para todo espacio de Banach B toda función multívoca φ de X en B semicontinua inferiormente y tal que $\varphi(x)$ es convexo y cerrado para todo $x \in X$, tiene una selección continua.

- El teorema anterior es válido también si se sustituye espacio de Banach por espacio vectorial topológico de Fréchet. Si se considera un EVTLC, para la validez del teorema es necesario imponer que $\varphi(x)$ sea completo.

- Por el resultado anterior, que hemos comentado, que permite obtener extensiones a partir de selecciones, se tiene el siguiente:
- COROLARIO: Toda función continua de un cerrado de un espacio paracompacto Hausdorff con valores en un espacio de Banach o un espacio de Fréchet tiene una extensión continua a todo el espacio.

- En los teoremas anteriores intervienen los espacios topológicos paracompactos. Estos espacios fueron introducidos por J. Dieudonné en 1944 como generalización de los espacios compactos y actualmente constituyen la clase más importante de espacios topológicos, ya que abarcan a los espacios metrizables y están caracterizados por la existencia de particiones continuas de la unidad, herramienta básica en muchas construcciones, subordinadas a recubrimientos abiertos. Precisamente, la demostración de la condición necesaria del teorema anterior utiliza esta caracterización.

- Por otro lado, en la demostración de la condición suficiente en los teoremas anteriores, juega un papel importante la completitud de $\varphi(x)$ puesto que la larga demostración consiste en construir una sucesión de funciones cuya evaluación en cada punto es una sucesión de Cauchy y, por tanto, la completitud, asegura la existencia de la función límite que da la selección continua buscada, ya que se prueba que esa convergencia es uniforme.

- Otro resultado importante sobre la teoría de selecciones es el siguiente:
- TEOREMA. Sea X un espacio paracompacto 0–dimensional (todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto cuyos elementos son disjuntos dos a dos), Y un espacio métrico completo (o espacio topológico completamente metrizable) y φ una función multívoca de X en Y semi–continua inferiormente tal que $\varphi(x)$ es cerrado para todo $x \in X$. Entonces, φ tiene una selección continua.

- Observamos que en el teorema anterior, comparado con el primero, se ha generalizado el espacio de llegada a costa de restringir el espacio de partida.

- La teoría de selecciones es ya una teoría clásica con aplicaciones a muchas ramas de la Matemática contemporánea: Topología general, variedades infinito dimensionales, topología geométrica, análisis funcional, teoría de juegos, procesos estocásticos, economía matemática, etc.

- Existen libros que tratan el tema de forma sistemática:
- (1). D. Repovš; P.V. Semenov: *Continuous Selections of Multivalued Mappings.* Kluwer, 1998.
- (2). J.E. Jayne; C.A Rogers: *Selectors.*
- Princeton University Press, 2002.

  Ambos textos contienen una amplia bibliografía sobre el tema.
- La revista *Topology and its applications* publicó en el año 2008 (V. 155) un número especial sobre esta teoría y sus aplicaciones dedicado a E. Michael.

Espacios uniformes

- Tanto los espacios topológicos como los uniformes son generalizaciones de los espacios métricos introducidos por Fréchet hace 105 años (1906).
- Los espacios topológicos, tal como los entendemos hoy día, fueron introducidos por Hausdorff en 1914 por abstracción de las propiedades esenciales de las bolas abiertas centradas en cada uno de los puntos de un espacio métrico, y en ellos se da sentido matemático preciso a los conceptos de límite, continuidad y convergencia.

- Los espacios uniformes se deben a A. Weil (1937), y en ellos se precisan los conceptos básicos de continuidad uniforme , sucesión de Cauchy, red o filtro de Cauchy, completitud, etc.
- Dado un espacio métrico, *(X,d),* si analizamos los conceptos de sucesión de Cauchy (criterio clásico de convergencia de sucesiones de números reales) o de función uniformemente continua (teorema clásico de Heine), nos percatamos que dichos conceptos se pueden formular en términos de las relaciones de *X* dadas por*:*

- $U_\varepsilon=\{(x,y):d(x,y)<\varepsilon\}\subset X\times X$, al variar ε en el conjunto de los números reales positivos.
- Por abstracción de las propiedades esenciales de estos conjuntos, se llega al concepto de espacio uniforme:
- Un *espacio uniforme* es un par $(X,\mathcal{U})$, donde X es un conjunto no vacío y $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de $X\times X$ tal que:

- (1) $U \supset \Delta = \{(x,x) : x \in X\}$, *para todo* $U \in \mathcal{U}$.
- (2) Si $M \supset U$ *y* $U \in \mathcal{U}$, *entonces* $M \in \mathcal{U}$.
- (3) $U, V \in \mathcal{U}$, *implica* $U \cap V \in \mathcal{U}$.
- (4) $U \in \mathcal{U}$, *implica que* $U^* = \{(y,x) : (x,y) \in U\}$ *es un elemento de* $\mathcal{U}$.
- (5) Para todo $U \in \mathcal{U}$, *existe* $V \in \mathcal{U}$, *tal que* $V \circ V \subset U$ *(° significa composición de relaciones en* X*).*

- Subyacente a todo espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ existe una *estructura topológica asociada* $T(\mathcal{U})$ en la que el sistema de entornos de un punto x está dado por $\mathcal{B}(x)=\{U[x]: U \in \mathcal{U}\}$, *donde* $U[x]=\{y: (x,y) \in U\}$. En el caso de un espacio métrico $U_\varepsilon[x]=B_\varepsilon(x)$ y la topología es la asociada a la métrica.
- Una aplicación f del espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ en el espacio uniforme $(Y, \mathcal{V})$ es uniformemente continua si la imagen inversa de cada $V \in \mathcal{V}$ por $f \times f$ es un elemento de $\mathcal{U}$. Toda función uniformemente continua entre espacios uniformes es continua respecto de las topologías asociadas a las uniformidades.

- Además de los espacios métricos, otra clase muy importante de espacios uniformes son los espacios topológicos compactos (de Hausdorff):
- Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico compacto (de Hausdorff) existe una única estructura uniforme $\mathcal{U}(\mathcal{T})$ en X tal que la topología asociada es $\mathcal{T}$. Esta estructura uniforme está dada por todos los entornos de la diagonal Δ en el espacio topológico producto $(X,\mathcal{T})\times(X,\mathcal{T})$. En este tipo de espacios uniformes toda función continua es uniformemente continua.

- Además, todo grupo topológico (no conmutativo) tiene asociados dos estructuras uniformes naturales cuyas topologías asociadas son la del grupo. Si el grupo es conmutativo esta dos estructuras coinciden, y este es el caso particular importante de un espacio vectorial topológico, en los que se considera la uniformidad del grupo topológico aditivo correspondiente.
- Sean V un espacio vectorial topológico y $\mathcal{B}(0)$ el sistema de entornos del 0. Para cada $A \in \mathcal{B}(0)$, sea $U(A)=\{(x,y):x-y \in A\}$. Entonces, todos los superconjuntos de estos en $V \times V$ definen la estructura uniforme natural de V.

- En el año 1977, Juan Fontanillas publica el artículo *Un Teorema de Selección Uniforme* en la Revista Matemática Hispano–Americana, IV Serie, V. 37, Págs. 3–18.

- En este artículo Fontanillas considera un tipo especial de espacios uniformes que denomina *espacios uniformes débilmente de dimensión finita,* que define de la siguiente forma:

- Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Un recubrimiento $\{A_i\}_{i \in I}$ de X, $(\cup A_i = X)$, es *uniforme* si existe $U \in \mathcal{U}$ tal que para todo punto x de X el entorno $U[x]$ está contenido en algún A_i, es decir, $\{U[x] : x \in X\}$ refina al recubrimiento dado $\{A_i\}_{i \in I}$.

- Un *refinamiento uniforme* de un recubrimiento de X es un refinamiento que a su vez es un recubrimiento uniforme.

- Un recubrimiento uniforme $\{A_i\}_{i\in I}$ diremos que es de dimensión finita *s* si todo punto *x* de *X* pertenece a lo más a $m(x)\leq s$ elementos del recubrimiento dado.
- El espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es *débilmente de dimensión finita*, si todo recubrimiento uniforme de *X* tiene un refinamiento uniforme de dimensión finita.
- Ejemplos de espacios uniformes débilmente de dimensión finita son los espacios compactos (de Hausdorff) y los espacios uniformes de dimensión finita.

- DEFINICIÓN (Fontanillas). Sean $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme, E la bola unidad de un espacio de Banach B y φ una función multívoca de X en E . Por una *r−selección uniforme* de φ entenderemos un recubrimiento abierto uniforme y de dimensión finita $\{A_i\}_{i \in I}$ de X y un subconjunto $\{y_i\}_{i \in I}$ de E tales que para todo elemento x de A_i se verifica que
- $\varphi(x)$ corta a la bola abierta $B_r(y_i)$ de E de radio r y con centro en el punto y_i .

- Una s–selección de φ está *subordinada* a un r–selección de φ si los abiertos de esta última son uniones de abiertos de la primera y los correspondientes puntos están a distancia menor que *r.*

- La función multívoca φ es *uniformemente semicontinua inferior* si existen $1/2^n$–selecciones uniformes de φ, $n=1,2,\ldots$, tales que la $1/2^{n+1}$–selección está subordinada a la $1/2^n$–selección.

- TEOREMA (Fontanillas): Sean $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y φ una función multívoca uniformemente semicontinua inferiormente de X en la bola unidad cerrada E de un espacio de Banach B tal que $\varphi(x)$ es convexo, cerrado y no vacío de E para todo $x \in X$. Entonces, φ tiene una selección uniforme, es decir, existe una función uniformemente continua $f: X \to E$ tal que $f(x) \in \varphi(x)$ para todo $x \in X$.

- *Idea de la demostración:* A cada $1/2^n$–selección se le asocia una partición equicontinua de la unidad subordinada al recubrimiento abierto correspondiente. Esta partición permite construir una función $f_n\colon X \to E$ uniformemente continua. Se prueba que para todo $x \in X$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauhy y que la convergencia de estas sucesiones es uniforme. Finalmente se comprueba que la función límite, que es uniformemente continua, es la selección f buscada.

- PROPOSICIÓN (Fontanillas): Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme débilmente de dimensión finita, E la bola unidad cerrada de un espacio de Banach B, A un subespacio uniforme (no necesariamente cerrado) de $(X,\mathcal{U})$ y $g:A\to E$ una función uniformemente continua. Entonces, la función multívoca φ definida por $\varphi(x)=\{g(x)\}$, si $x\in A$, y $\varphi(x)=E$, si $x\in X-A$, es uniformemente semicontinua inferiormente.

- Como consecuencia de los dos resultados anteriores se tiene:
- TEOREMA (Fontanillas): Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme débilmente de dimensión finita, E la bola unidad cerrada de un espacio de Banach, A un subespacio uniforme (no necesariamente cerrado) de $(X,\mathcal{U})$ y $g:A\to E$ una función uniformemente continua. Entonces, existe una función uniformemente continua $f:X\to E$ que extiende a g, es decir, $f(x)=g(x)$ para todo $x\in A$.

Como hemos dicho anteriormente, todo espacio topológico compacto es un espacio uniforme débilmente de dimensión finita y en consecuencia se concluye:

COROLARIO: Sean X un espacio topológico compacto, A un subespacio de X (no necesariamente cerrado) y $g:A\to E$ una función uniformemente continua. Entonces, existe una función continua (y por tanto, uniformemente continua) $f: X\to E$ que extiende a g.

- Es interesante destacar que este corolario no es cierto, en general, si A no es cerrado y g es únicamente continua.

- Por otro lado, queda claro la aportación de Juan Fontanillas a la teoría de espacios uniformes y selecciones uniformes al comparar los resultados obtenidos con los que hemos recordado de Michael en el contexto de los espacios topológicos.

Ya como Profesor Adjunto de la UAM, Fontanillas dirige la tesis doctoral de Dª. Rosa Barbolla García, Profesora Ayudante del Departamento de Geometría y Topología de la UCM y que actualmente es Catedrática de *Fundamentos de Análisis Económico* de esta Universidad, con el título de *Teoría de Selecciones: Selecciones continuas y uniformemente continuas*. La tesis fue leída en el año 1980 en la UCM y me correspondió ser ponente de la misma.

- En la Tesis se sigue desarrollando el concepto de aplicación multívoca semi–uniformemente continua inferiormente con el que se consigue convertir todo problema de extensión de una función uniformemente continua de un subespacio de un espacio uniforme débilmente de dimensión finita y con valores en un espacio uniforme, en un problema de selección uniforme. Se extienden los resultados del artículo anterior sustituyendo los espacios de Banach por espacios vectoriales topológicos localmente convexos, y se dan muchos ejemplos delimitando la validez de los resultados.

- Parte de los resultados de la tesis citada dieron lugar a la publicación conjunta Barbolla-Fontanillas del artículo *Sélections uniformément continues dans les espaces uniformes de dimension faiblement finie,* publicado en C.R. Acad. Sc., París, t. 294, p. 47-50, y presentado por Henri Cartan en la sesión del 4 de enero de 1982.

- En este artículo se establecen los tres teoremas siguientes:
- TEOREMA 1. Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme débilmente de dimensión finita , Y un EVTLC con su uniformidad usual, $S \subset Y$ un subconjunto convexo y acotado, y φ una función multívoca de X en Y c–semi–uniformemente continua inferiormente. Entonces, si para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ es un subconjunto no vacío, convexo y completo de S y $\{\varphi(x): x \in X\}$ es uniformemente equimetrizable por medio de una uniformidad $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ definida por una sucesión de elementos de $\mathcal{U}$, (para todo $U \in \mathcal{U}$ existe U_n de $\mathcal{U}_0$ con $(\varphi(x) \times \varphi(y)) \cap U_n \subset U$, $x, y \in X$), existe una selección uniforme de φ.

- TEOREMA 2. Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme débilmente de dimensión finita, A un subconjunto de X, Y un EVTLC con su uniformidad usual, S un subconjunto de Y convexo, cerrado, acotado, metrizable y completo, y $g:A \to S$ un función uniformemente continua. Entonces, existe $f:X \to S$ uniformemente continua tal que $f|A = g$.

- TEOREMA 3. Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme de dimensión cero (definición análoga a la dada para espacios topológicos, considerando recubrimientos unformes), $(Y, \mathcal{V})$ un espacio uniforme, y φ una función multívoca de X en Y semi-uniformemente continua inferiormente. Entonces, si para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ es un subconjunto completo de $(Y, \mathcal{V})$ y $\{\varphi(x) : x \in X\}$ es uniformemente equimetrizable por medio de la uniformidad $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ (teorema 1), existe una selección uniforme de φ.

- Termino con consideraciones filosóficas sobre la jubilación. Para algunos el vocablo jubilación procede del término latino *jubilatïo*, que significa fiesta o alegría (gritos de alegría de los campesinos al terminar el trabajo). Para mí después de 7 años de jubilado, considero que lo importante de esta situación, siempre que se tenga resuelto el problema económico que desencadena, es poder disponer de tiempo sin exigencias de tener que subir al estrado para dar clase o tener que asistir a una reunión, en la que se discute mucho y se aprueba poco, con hora fija. Pero es necesario cubrir las muchas horas pasadas en la Universidad por otras actividades. Si uno tiene ya otras actividades paralelas mientras está en activo, problema resuelto. En caso contrario, como para ejercer nuestra profesión de matemáticos no necesitamos más que *neuronas, papel, lápiz, e información*, es claro que la podemos seguir desarrollando en la nueva situación, cosa que no puede hacer, por ejemplo, un trabajador que se dedica al montaje de coches puesto que no se puede llevar a su casa la cadena de montaje. Por ello querido Juan, alumno, compañero de tareas docentes en la UM y buen amigo, te deseo que en esa fiesta continua que se te avecina sigas con esas actividades paralelas o pensando en algún problema en el campo de la Matemática que aún no hayas resuelto o que te plantee algún colega en el futuro, y finalmente que sigas disfrutando de la vida en compañía de tu familia.
- Muchas gracias.